

小標本データの統計分析へのベイズ定理の適用

Application of Bayes' Theorem to Statistical Analysis of Small Sample Data

酒 井 信 介*

Shinsuke SAKAI

1. 緒言

近年、機械製品に求められる高機能化に伴い、確率論的取扱いを求められる機会が増えている。このことは、機械製品の高機能化に伴い、万が一の事故時には結果も重大となる傾向があることと無関係ではない。高圧力のもとに貯蔵される車載型の複合材料水素タンクなどはその典型的な例であろう。例えば、G.W.Mair は規格策定の検討において、安全裕度の検討に、確率論的取り扱いを導入することを提案している⁽¹⁾。筆者は、燃料電池車の複合材料水素タンクの安全規格の取り扱いで、GTR 規格などで度たび議論のある確率論的扱いの考え方を紹介している⁽²⁾。この記事では、自動車分野外の立場から筆者がこれまで体験してきた信頼性設計の観点から、概要をとりまとめている。その中では、歴史的背景、手法の内容、メリットデメリット、他分野での活用事例、燃料電池車での活用の可能性、などについて言及した。これに引き続き、重要となるアクションは、わが国の現状に対して、具体的に確率論的扱いを適用した上で、破裂強度に対する安全裕度の根拠に基づく議論を開始することであろう。そのために、不可欠となるのが統計データの整理である。統計量の基本は、水素タンクの破裂圧力の平均値、分散などの基礎統計量である。しかし、水素タンクの破裂強度の基礎統計量を実験的に取得することは、コスト、労力の観点から容易なことではない。しかも、結果の重大性に鑑みてより高度の安全性が求められるということは、その発生確率が極めて小さいことを意味し、その意味でもサンプルサイズを大きくとることに困難が伴う。もし、膨大なデータ量を取得できるのであれば、いわゆる標本統計学に基づいて、母集団の基礎統計量を精度よく評価することもさほど困難なことではないかもしれない。しかし、複合材料水素タンクの場合は、サンプルサイズを大きくとることは期待できないとしたら、標本統計学の適用は一般に困難である。このような場合に、小標本の統計量の評価に効果的な、ベイズ統計学という考え方がある。例えば、プラントの圧力設備の検査をリスクに基づいて実施するリスクベース検査において、保全データの統計処理においてベイズの定理が活用されている⁽³⁾⁽⁴⁾。これは、保全データのサンプルサイズを大きくとれないことと関係し

ている。本稿においては、ベイズの定理の基本的考え方から、例題、応用法、適用にあたっての注意点をまとめる。

2. ベイズ統計学の特徴

ベイズの定理について具体的に説明する前に、まずその特徴について述べる。機械製品の破損にかかわる基礎統計量の評価が求められる時に、以下のような状況にあるときには、まずはベイズの定理の適用を考えることが望ましいと考えられる。

1. 対象とする事象が極めて発生頻度の低い事象である
2. 実験によって事象を発生させるためにコスト、労力を要する
3. 対象とする事象が遷移する可能性がある

このような状況にあるとき、サンプルサイズを急激に増やすことは困難が予想され、大きなサンプルサイズを前提とする標本統計学の適用は困難であろう。上記状況の中の3番目の項目について補足する。例えば、プラントの保全を考えると、配管や圧力容器の損傷状況は内圧などの運転条件にも依存する。ある時期に、運転条件を変更したとすると、それ以降、損傷確率にかかわる基礎統計量も変化する可能性がある。また、水素タンクなどの開発段階では、設計仕様を変更することが行われるであろう。この場合も、損傷確率にかかわる基礎統計量が変化する事が予想されるが、設計仕様の変更のたびごとにサンプルを開始するようでは、いっこうにサンプルサイズが増えることはないであろう。このような困難な状況であっても、ベイズ統計学には次のような特徴があり、ある程度対応できるのである。

1. 破損したという情報のみならず、破損しなかったという情報も統計処理に活用する
2. 統計分布の特定に当たり、母数の確からしさを、少ないサンプルサイズから更新するという手法をとる
3. 母数の確からしさには、出発点では経験値、文献、主観などにより定める

標本統計学では、平均値などの母数を、サンプルデータから統計処理により、一つの値として評価するが、ベイズ統

*横浜国立大学 客員教授, 博士 (工学)

計学では、母数を一つの値として評価するのではなく、確からしさというあいまいなものとして取り扱うのである。極端な場合には、出発点として確からしさを主観によって決定することもある。これが主観的確率と呼ばれる所以である。統計処理に主観が入ることはけしからんと思えるかもしれないが、ベイズ統計学では、サンプルデータを取得するたびごとに、更新が行われ、この確からしさが確実に正解に近づいていくということが言える。従って、やがては真値に収束することが期待できる。また、上記の「対象とする事象の遷移」があったとしても、ベイズ統計学では更新により処理するため、その事象の遷移に対しても追隨していくことが期待される。しかし、適切な方針のもとに、適用しないとその収束の効率を上げることはできないので、原理をよく理解した上での適用が望まれる。

3. ベイズ統計学の基礎原理

3.1. 考え方

対象として圧力タンクを想定し、その破裂圧力の分布が正規分布であるものとする。正規分布の確率密度関数は次式で表現される。

$$f(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (1)$$

ここで x は破裂圧力の確率変数であり、母数としては平均値 μ と分散 σ^2 の二つが存在する。 $f(x|\mu, \sigma)$ は、母数が μ, σ のもとでの確率密度関数であることを示す。平均値 μ と分散 σ^2 である正規分布のことを $N(\mu, \sigma^2)$ と表現することもある。破裂圧力の基礎統計量を明らかにすることは μ と σ^2 を求めることである。サンプルサイズ n を十分に大きくとることができる場合には、標本平均 $\hat{\mu}$ と不偏標本分散 $\hat{\sigma}^2$ は次式から評価できる。

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2 \quad (3)$$

サンプルサイズを大きくとることができるのであれば、これらの母数を精度良く評価できる。それが期待できないときに、ベイズ統計学の適用を考える。ここでは、簡単化のため分散 σ^2 は既知であるものとし、平均値 μ のみが未知で、これを推定する場合について説明する。両者の母数が未知の場合にも適用可能であるが、その場合の取り扱いは後述することとする。

式(2)による評価により、一つの標本平均値が確定することとなり、手続き上主観が入る余地はない。その意味で客観的手続きと呼ぶことができる。これとは対照的にベイズ統計学では、推定量 μ について、不確実性を与える。つま

り、確定的に一つの値を割り当てることをしない。新たな実験データが得られたとすると、压力容器が特定の条件で破裂したか、しなかったかという結果は客観的事実である。ベイズ統計学では、数少ない客観的事実に基づいて、推定量の不確実性を更新していくことを行う。このことをベイズ更新と呼ぶ。ベイズ更新によって、いきなり母数の正解が得られるわけではないが、正解に近づくということと言える。更新する前の不確実性のことを事前分布、更新した後の不確実性のことを事後分布と呼ぶ。図1に概念的に考え方を示す。縦軸は、確率密度 (Probability density) である。

例えば図1の左側が不確実性の事前分布であり、 μ_0 が母数の正解であるとするとき、一回の破裂試験の結果に基づいて、ベイズ更新の結果に基づき、不確実性の事後分布が μ_0 の近傍に集まってくる様子を示している。破裂試験のサンプル数が多いほど、よりよい収束の結果が期待され、また繰り返し回数を増やすことにより正解に漸近していくことになる。一番最初に設定する事前分布を初期事前分布と呼ぶ。もし、初期事前分布の設定が的外れなものであれば、収束の性能は期待できないので、慎重に設定することが重要である。初期事前分布は、過去に類似の製品の結果があるときには、それに基づいて設定する、経験者の意見に基づいて設定する、文献情報に基づいて設定する、などの方法がとられる。いずれにせよ、初期事前分布は確定的に与えるものではなく、ある意味主観に基づいて決定されるものなので、主観的確率と呼ばれることもある。あらかじめ、何の情報もない状態からスタートするのであれば、広領域に渡って不確実性を設定することになる。このような分布のことを無情報性事前分布と呼ぶ。図1では、事前分布を連続分布として設定したが、図2のように離散的な値として設定することも可能である。つまり、平均値の不確実性を連続分布として表現するのではなく、 μ_a か μ_b のいずれ

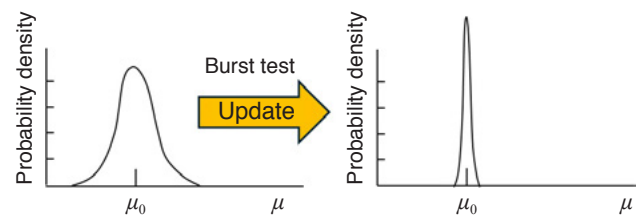


Fig. 1 Principle of Bayesian update for continuous distribution

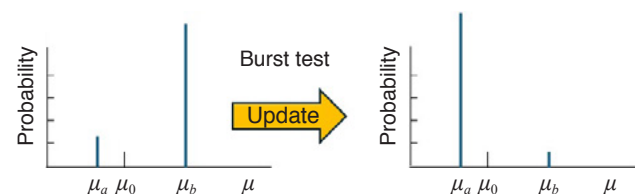


Fig. 2 Principle of Bayesian update for discrete values

か、という形で離散値として推測する方式である。

この図、左側である事前分布では、推測する μ_a と μ_b の値について、各々不確定性に関する確信度の値を離散的に設定している。この例では、 μ_a は真値である μ_0 に近い値であるにもかかわらず、 μ_b よりも低い確信度を設定してしまっている。サンプル値が得られた後には、ベイズ更新の結果、 μ_a の確信度が高くなっており、真値がより μ_a に近いものと判断できる。

3.2. 基礎原理

3.2.1. 離散値の推定

今、ベイズの定理で推定したい、母数などのパラメータが θ であるとする。母数が θ である場合の、破裂などの観察事象 x が生起する確率密度関数を $f(x|\theta)$ と表現する。通常の標本統計学では、サンプルデータから統計処理により標本値 $\hat{\theta}$ を評価するので、主観の入り余地はない。一方、ベイズ統計学では、 θ について、主観に基づいて値を設定し、あわせてその値の不確定性に対する確信度も割り当てる。今、ここでは簡単のために θ_1 と θ_2 の二つの離散的な値を設定し、初期の時点での各値に対する確信度を各々 P_1, P_2 とする。ベイズの定理では、観察される事象は、必ず θ_1 か θ_2 の値に基づいて生起するものと仮定する。つまり、 $P_1 + P_2 = 1$ を満足しなければならない。例えば、母数が θ_1 であるとする確信の度合いが高ければ、 $P_1 = 0.8, P_2 = 0.2$ などと設定する。今、破裂などの観察事象を A と書くこととする。このとき、論理関係は図3のようなベン図で表現できる。ここで、 C_1 は、観察された現象が θ_1 に起因して発生した事象であることを示し、 C_2 は、観察された現象が θ_2 に起因して発生した事象であることを示す。今後、ある事象が発生する確率を $P(\text{事象})$ と表現することにする。原因となる事象が C_1 でなくかつ、 A という事象が観察される確率は、ベン図の基本的性質から次式で表現できる。

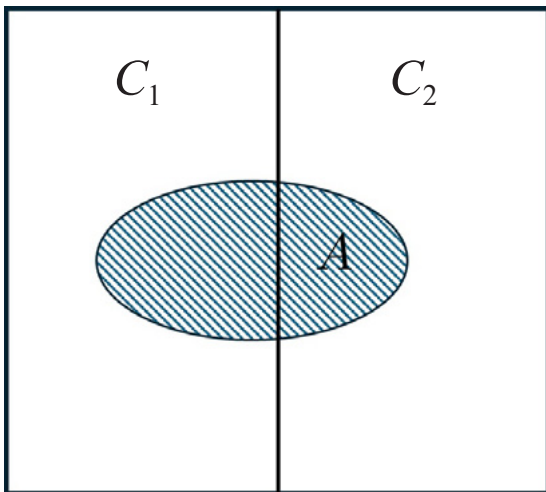


Fig. 3 Venn diagram

$$\begin{aligned} P(C_1 \wedge A) &= P(C_1)P(A|C_1) \\ &= P(A)P(C_1|A) \end{aligned} \quad (4)$$

ここで $\wedge$ は、AND の論理関係を示し、 $P(A|C_1)$ は、原因 C_1 の条件の下での A が観察される条件付き確率を示す。式(4)を変形することにより

$$P(C_1|A) = \frac{P(C_1)P(A|C_1)}{P(A)} \quad (5)$$

が得られる。一方、 $P(A)$ は

$$P(A) = P(C_1)P(A|C_1) + P(C_2)P(A|C_2) \quad (6)$$

と書けるので、式(5)に代入することにより、

$$P(C_1|A) = \frac{P(C_1)P(A|C_1)}{P(C_1)P(A|C_1) + P(C_2)P(A|C_2)} \quad (7)$$

と表現できる。式(7)の右辺内の成分は上記の問題では以下により与えられる。

$$\begin{aligned} P(C_1), P(C_2) &\Leftrightarrow P_1, P_2 \\ P(A|C_1), P(A|C_2) &\Leftrightarrow f(x|\theta_1), f(x|\theta_2) \end{aligned} \quad (8)$$

従って、右辺の量は全て与えられた量である。一方、左辺 $P(C_1|A)$ は、 A という観察事象があったという制約条件のもとで、 C_1 が生起する確率を示すから、観察事象を反映した後の C_1 に対する確信の度合いを示すことになる。従って $P(C_1|A)$ がベイズ更新後の事後確率ということになる。 $P(C_2|A)$ についても同様にして

$$P(C_2|A) = \frac{P(C_2)P(A|C_2)}{P(C_1)P(A|C_1) + P(C_2)P(A|C_2)} \quad (9)$$

と求まる。 $P(C_1|A)$ や $P(C_2|A)$ は、 A という観察事象をもとに、 C_1 と C_2 に対する確信の度合いが $P(C_1)$ と $P(C_2)$ から更新されたことを示す。このように、観察事象に基づいて、確信の度合いを更新していくのがベイズ統計学である。引き続き、観察事象が得られたときには、この $P(C_1|A)$ と $P(C_2|A)$ を次回の事前確率として利用することにより、同じ手続きで更新を継続できる。この結果、確信の度合いがより高くなる事象をてがかりに、 θ の推定を行う。

簡単な例題を考える。今、測定対象の物理量が正規分布するとし、平均値 $\mu_0 = 0$ 、標準偏差 $\sigma_0 = 1$ であるとする。この分布を有する物理量を実験による計測値により、推測することを考える。その際、上記のベイズ定理を用いて、一回の測定値ごとに更新していく。ここでは、簡単化するため、標準偏差 $\sigma_0 = 1$ は既知であって、平均値を推定するものとする。まず、表1の二つの離散的な事象を推定対象とする。あわせて事前確率(確信度)も示している。この二つの離散値および初期の事前確率は、経験者の知見に基づいて設定することを想定している。事前確率の総和は1.0であ

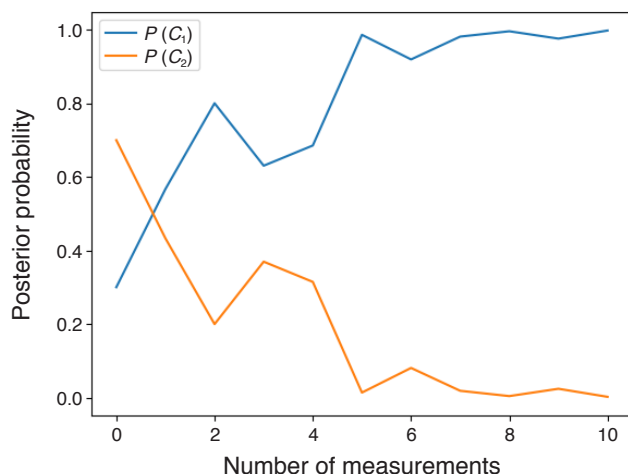
Table 1 Two discrete events

Symbol	Events	Prior probability
C_1	$\mu = -0.1$	0.3
C_2	$\mu = 1.5$	0.7

る必要がある。この場合、母集団の平均値は正しくは 0.0 であるにもかかわらず、この正解に近い -0.1 に対して、0.3 と低い確信度を与え、よりはずれている 1.5 に対して 0.7 の確信度を設定している。それでは、試行実験により、この確信度がどのように更新されているかをシミュレートしてみる。まず、 $N(0.0, 1.0^2)$ の正規乱数を 10 個発生し、10 回の実験データによってベイズ更新が行われていく様子を観察する。 i 番目の乱数を $rnd(i)$ と表記する。最初の実験値 $rnd(0)$ が得られたときのベイズ更新は式 (7) により行われる。この式の右辺は、下記のように全て与えられている量である。

$$\begin{aligned}
 P(C_1) &= 0.3 \\
 P(A|C_1) &= f(rnd(0) | -0.1, \sigma_0) \\
 P(C_2) &= 0.7 \\
 P(A|C_2) &= f(rnd(0) | 0.3, \sigma_0)
 \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、1 回目の観察事象 A は、実験値 $rnd(0)$ が得られたことに対応する。確率密度関数 $f(\cdot)$ は式 (1) で与えられている。この結果、確信度の更新値 $P(C_1|A)$ が得られる。同様にして C_2 の確信度の更新値 $P(C_2|A)$ は、式 (9) により得られる。さらに、次の実験値 $rnd(1)$ に対しては、 $P(C_1|A) \rightarrow P(C_1)$ 、 $P(C_2|A) \rightarrow P(C_2)$ として、次の更新を行えばよい。以下は同様の手順を繰り返していけばよい。図 4 は、10 個の実験値に対するベイズ更新による事後確率の変化を示す。真値に近い C_1 の確信度がより高く、真値からはずれる C_2 の確信度がより低く変化していく様子を確認

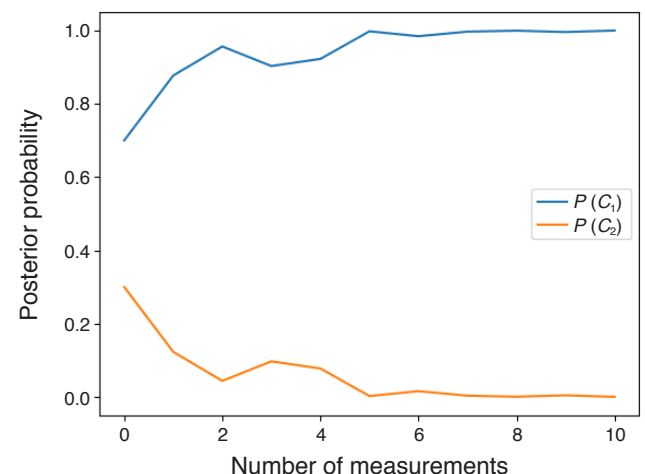
Fig. 4 Variation of posterior probability ($P(C_1) = 0.3$, $P(C_2) = 0.7$)

できる。この結果、真値はより C_1 の事象であるとする確信が高くなっていく。このように、初期の段階で十分な量のサンプルデータが存在しない場合に、主観に基づいて予測値、確信度を柔軟に設定した上で、その後、数少ない実験データに基づいて、データが得られるたびに、母数の確信度を更新していく方式がベイズ統計学の特徴である。

上記の例では、初期事前分布として、正解に近い -0.1 に対して、0.3 と低い確信度を与えていたが、もしこの確信度をより適切に 0.7 と高く設定した場合の結果が図 5 である。図 4 と比較すると、早く正解の確信度が 1.0 に収束していることが確認できる。このように、初期の事前分布をより適切に設定できれば、早く正解に収束していくが、的外れな設定であれば、収束の程度は劣化する。この場合、かえって効率が低下することにもなるので、初期の事前分布を経験者、過去の事例調査などによっていかに適切に設定するかが鍵となる。

3.2.2. 平均値未知、分散既知の場合の連続分布の推定

上記の例では、推定する破裂確率密度関数の母数を推定するのではなく、破裂確率を離散的な二つの値のいずれかであるものと仮定し、その離散値に対する確信の度合いをベイズ定理で更新する方式を用いた。これを、より一般的な推定方法に拡張するためには、式 (1) の破裂確率密度関数の母数そのものを推定することが考えられる。母数には平均値 μ と標準偏差 σ の二つが存在する。これらの母数の推定にベイズ定理を適用することを考える。二つの母数の両者に対して適用可能であるが、ここでは説明を簡単にするために、平均値 μ のみを対象とする。母数推定の汎用性を増すためには、離散値の μ を推定する形式ではなく、連続分布として確信度を表現した上で、連続分布を更新していく形式が望ましい。つまり、特定の平均値 μ のときの、破裂確率密度関数は、

Fig. 5 Variation of posterior probability ($P(C_1) = 0.7$, $P(C_2) = 0.3$)

$$f(x|\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (11)$$

であるが、この関数を尤度関数と呼ぶ。 μ の不確定性表現する連続分布として確率密度関数 $g(\mu)$ を設定する。連続分布を設定する考え方は後述するが、まずは事前分布として、離散的方法の場合と同様にして、経験に基づいて設定したものとする。このとき、今観察値 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ が得られた時の事後確率分布はベイズ更新の考え方から以下のように表現できる。

$$g'(\mu|X)d\mu = \frac{g(\mu) \prod_{i=1}^n f(x_i|\mu)d\mu}{\int_{-\infty}^{\infty} g(\mu) \prod_{i=1}^n f(x_i|\mu)d\mu} \quad (12)$$

これにてベイズ定理に基づいて事後の確率密度関数 $g'(\mu|X)$ が誘導される。観察値が得られるたびに、ベイズ更新の考え方を適用していけば、確信の度合いを表現する連続分布関数は、徐々に真の値に収束していくことが期待できる。しかし、ここに一つやっかいな問題が存在する。事前分布として $g(\mu)$ として全く任意の関数を設定してしまうと、事後分布である $g'(\mu|X)$ は、事前分布とは何の関連性も持たないものが生まれるであろう。この場合、式 (12) の評価は結構やっかいなものとなる。近年は計算機能力の向上に伴い、式 (12) で与えられるような複雑な表式であっても、計算機能力を用いて力づくで、確率密度関数を数値的に導くことも比較的簡単になっている。MCMC 法 (Markov Chain Monte Carlo Simulation) ⁽⁵⁾ はその代表的な方法である。また、この計算を支援するソフトウェアとして Stan や PyMC3 などの入手も容易になっている。このようなソフトの活用によって、任意の分布に対して適用する考え方もあるが、幸い、この事前確率にある条件を付けることによって、この取り扱いが極めて容易になる。それが、共役事前分布という考え方である。汎用性と取り扱いの容易さの観点からは、共役事前分布の考え方を適用することがよいと考えられるので、ここではこの考え方について説明する。

今課題となっていることは、事前分布 $g(\mu)$ と事後分布 $g'(\mu|X)$ の分布形が全く異なったものになってしまうことであつた。ところが、対処とする $f(x|\mu)$ の分布形に対応して、 $g(\mu)$ として特定の分布形を採用すると、ベイズ定理を適用して得られる $g'(\mu|X)$ もまた、同一の種類の分布形になることが分かっている。ただし、母数を変更することになる。このような関係が成立することを共役性が成立するといい、このようにして設定した事前分布のことを共役事前分布と呼ぶ。 $f(x|\mu)$ が正規分布のとき、 μ に関する事前共役分布は正規分布であることが分かっている。つまり、 $g'(\mu|X)$ もまた正規分布になるのである。

今、対象とする確率変数が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うものとし、分散は σ^2 は既知とする。母数の平均値 μ について、

確信度に連続分布を設定して、ベイズ更新する。この場合、平均値に対する共役事前分布が正規分布であることを利用する。つまり、平均値の確信度の事前分布として、正規分布を設定すると、事後分布もまた正規分布となる。事前分布として $N(\lambda_1, \tau_1^2)$ を設定したとき、 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ のサンプルが得られた時の事後分布が以下になることが誘導されている ⁽⁶⁾。

$$N(\lambda_2, \tau_2^2) \quad (13)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \\ \lambda_2 &= \frac{n\tau_1^2 \hat{x} + \sigma^2 \lambda_1}{n\tau_1^2 + \sigma^2} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\tau_2^2 = \frac{\sigma^2 \tau_1^2}{n\tau_1^2 + \sigma^2} \quad (15)$$

つまり、正規分布となる事後分布の二つの母数は式 (14) と式 (15) とから容易に評価できる。この事後分布を、次回以降の事前分布として活用していけばよい。

例題として、 $f(x|\mu, \sigma)$ の正解が $N(0, 1^2)$ の正規分布について、 $N(\lambda, \tau^2)$ の初期事前分布を $N(0.5, 1^2)$ からスタートし、ベイズ更新していくことを考える。測定タイミングで、 $N(0, 1^2)$ の乱数 10 個の観測値が得られるものとして、事前分布がベイズ更新によってどのように変化していくかを見ていく。この変遷は式 (14) と式 (15) を使えば容易に追跡できる。図 6 が 2 回分のベイズ更新に事前分布の変遷を示す。ベイズ更新の度ごとに、平均値の予測事前分布は正解の近傍に収束していくことが確認できる。

3.2.3. 平均値も分散も未知の場合の連続分布の推定

次に、平均値 μ も標準偏差 σ もいずれも未知であつて、

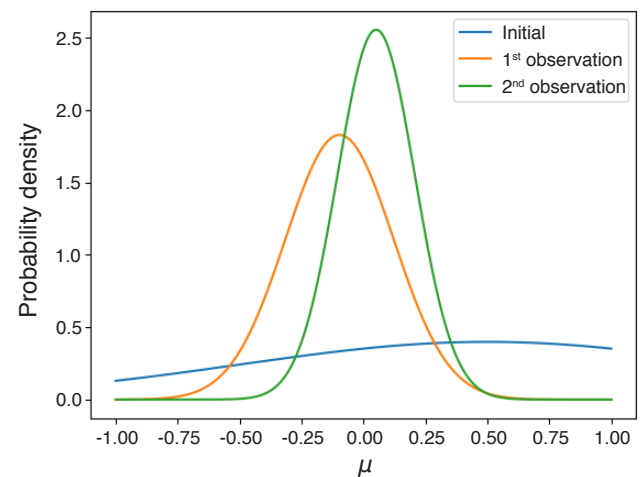


Fig. 6 Variation of prior distribution by Bayesian update

ベイズ更新によって推定していくことを考える。この場合、観察値 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ が得られた時の事後確率分布はベイズ更新により次式で評価される。

$$g'(\mu, \sigma|X) d\mu d\sigma = \frac{g(\mu, \sigma) \prod_{i=1}^n f(x_i|\mu, \sigma) d\mu d\sigma}{\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty g(\mu, \sigma) \prod_{i=1}^n f(x_i|\mu, \sigma) d\mu d\sigma} \quad (16)$$

ここに、 $g(\mu, \sigma)$ は、共役事前分布となる二次元同時確率密度関数であり、式 (18) (19) のように表現されることが分かっている⁽⁷⁾⁽⁸⁾。

$$g(\mu, \sigma) = \pi(\mu|\sigma^2) \pi(\sigma^2) \quad (17)$$

$$\pi(\mu|\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/k_0}} \exp\left[-\frac{(\mu - \hat{\mu}_0)^2}{2\sigma^2/k_0}\right] \quad (18)$$

$$\pi(\sigma^2) = \frac{(\hat{\sigma}_0^2 v_0/2)^{v_0/2}}{\Gamma(v_0/2)} \frac{\exp\left(-\frac{v_0 \hat{\sigma}_0^2}{2\sigma^2}\right)}{(\sigma^2)^{1+v_0/2}} \quad (19)$$

なお、 $\hat{\mu}_0, k_0, v_0, \hat{\sigma}_0$ は事前分布のパラメータであり、式 (19) は、確率密度関数が以下の母数 2 個で表現される逆ガンマ分布である。

$$f_{\text{Igamma}}(x|\alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} (1/x)^{\alpha+1} \exp(-\beta/x) \quad (20)$$

$$\alpha = v_0/2 \quad (21)$$

$$\beta = \hat{\sigma}_0^2 v_0/2 \quad (22)$$

共役事前分布のパラメータの更新は以下の計算で行われることが導かれている。

$$k' = k + n \quad (23)$$

$$m' = [km + n\hat{\mu}]/k' \quad (24)$$

$$v' = v + n \quad (25)$$

$$v(s')^2 = vs^2 + (n-1)S^2 + kn(\hat{\mu} - m)^2/k' \quad (26)$$

ここで、 $\hat{\mu}$ は、サンプル平均値であり S はサンプルデータの不偏標準偏差である。

例題として、母集団の正解が $N(7, 2^2)$ であるケースについて、モンテカルロシミュレーションにより、10 個ずつのサンプルが 2 回得られた場合について、確信度の連続分布がベイズ定理によってどのように更新されていくかを見ることとする。まず初期の確信度の事前分布としては、正解の母数とはかけ離れた状態からスタートすることとし、 $\hat{\mu}_0 = 4.0, k_0 = 1.0, v_0 = 2.0, \hat{\sigma}_0^2 = 4.0$ からスタートすることとする。図 7 に、確信度の初期事前分布の同時確率密度関数を示す。この分布のピークを示す座標値は、正解である $(7, 2^2)$ とはかけ離れていることが確認できる。

10 個の乱数を発生させ、式 (16) によりベイズ更新して得られた同時確率密度関数の結果が図 8 である。ピークと

なる位置の座標値は、 $(7, 2^2)$ に近くなっていることが読み取れるものの、密度値はピーク値周辺に大きく分布していることが分かる。さらに、次の乱数 10 個を発生させた上で、ベイズ更新により得られた同時確率密度関数が図 9 である。ピークの座標値は正解である $(7, 2^2)$ に漸近するとともに、その周辺に密度値が集中していることが確認できる。以後、同様にサンプルが得られるたびごとに、ベイズ更新していけば、正解となる母数の周辺に同時確率密度関数値が集中していくものと考えられる。

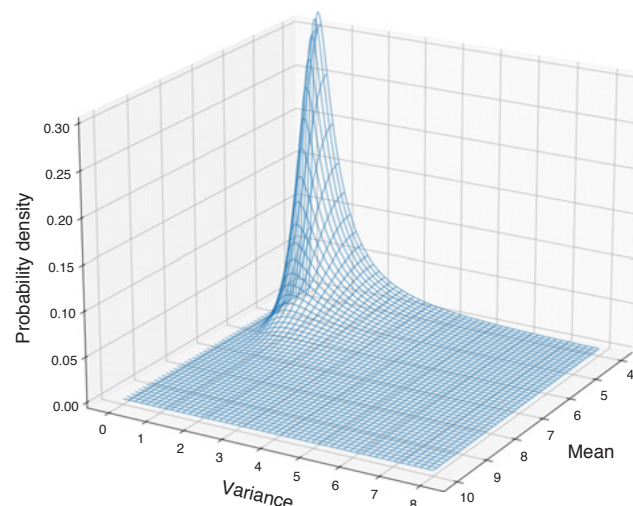


Fig. 7 Initial prior distribution

4. 設計変更を伴う製品の統計データ取得への応用

統計データ取得が求められる対象製品が開発段階にあって、しかもその統計的性質が求められる場合がある。対象製品の製造コストが高い場合には、ただでさえ標本数を増やすことが困難であるところ、開発段階にあって製品の強度特性も変化する可能性がある場合には、対象製品の統計的性質の取得には多くの困難が伴うことが予想される。このような場合にこそ、ベイズの定理の適用は有効であると考えられる。つまり、ベイズの定理では、初期の事前分布を図 7 のように仮定することにより、一度の試験でサンプルサイズの大小にかかわらず、ベイズ更新によって図 8 のような事後分布が得られる。仮に、この後に対象製品の設計変更があったとする。一般に、開発段階での設計変更は、大幅な変更にならないケースが多いものと考えられる。その場合には、統計的性質の母数の値も極端に変化することは考えにくい。そうであれば、図 8 の分布を、次の製品の統計的性質推測のための、事前分布として利用可能であり、ベイズ更新によって、その統計的性質の変化に適切に追従していくことが期待できる。ただし、極端に統計的性

質が変化してしまうことがあれば、図8の分布を事前分布として利用することが必ずしも有効ではなく、またリセットしてベイズ更新を進めていくことになる。

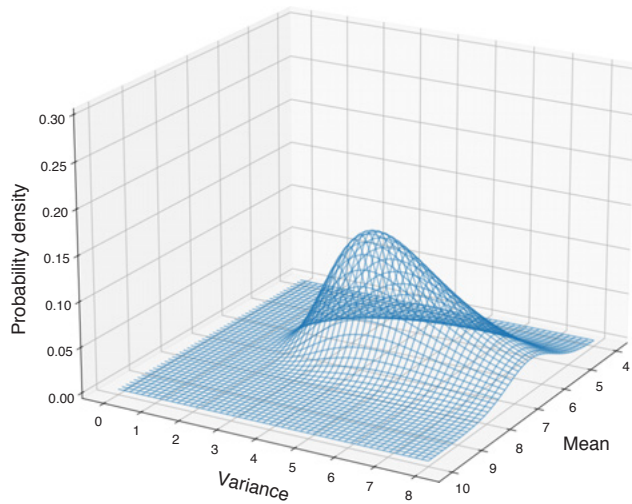


Fig. 8 Second prior distribution

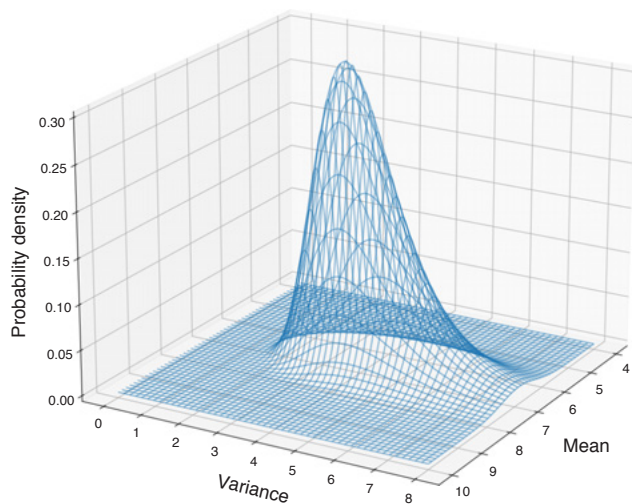


Fig. 9 Third prior distribution

5. 圧力機器メンテナンスへの応用事例

産業応用の具体的事例として、圧力機器のリスクベース検査の際に必要な破損確率評価へのベイズ定理の適用について紹介する。配管や圧力容器などの圧力機器のメンテナンスの考え方の一つとしてリスクベース検査がある。旧来のメンテナンス方式が、決まった時期に、決まった部位について、決まった検査方法で計画的に実施する方法が主流であったところ、その不合理性を排除するために、リスクを指標として検査計画を継続的に見直しをする方法がリスクベース検査である。この分野で先行していたのは、米国石油協会が発行したガイドライン API581⁽⁹⁾である。これに対応する、我が国の規格が日本高圧力技術協会から発行されている⁽¹⁰⁾。ここでは、API581 で用いられている破損確率評価へのベイズ定理の適用例を文献⁽⁴⁾を参考にして紹介する。

図10に、リスクベース検査を行うための一般的手順をフローの形で示す。検査プログラムの策定にあたって、指標としてはリスク値を用いるので、図中には破線で示すリスクアセスメントを行うステップがある。この中で、リスク値の解析を行っているが、リスクの定義は影響度 (Consequence) と太線の枠で示す損傷の起きやすさ (Likelihood) の積で与えられる。この中の損傷の起きやすさの部分の評価にベイズの定理が適用されているので、以下に紹介する。

配管や圧力容器のメンテナンスにおいては、内部流体による金属材料の腐食が主要な損傷モードの一つである。同一の運転条件、環境で操業している限りは、腐食は定常状態で進行するので、腐食速度が大きく変化することはないと期待できる。損傷とは、腐食の進行によって板厚を貫通し、内部流体の漏洩が発生することであるので、損傷の起き易さ、つまり損傷確率は残存肉厚が板厚の何割ぐらいであるかによって評価できる。残存肉厚の測定は、適切な非破壊検査法によって行われ、腐食の進行が定常的であるこ

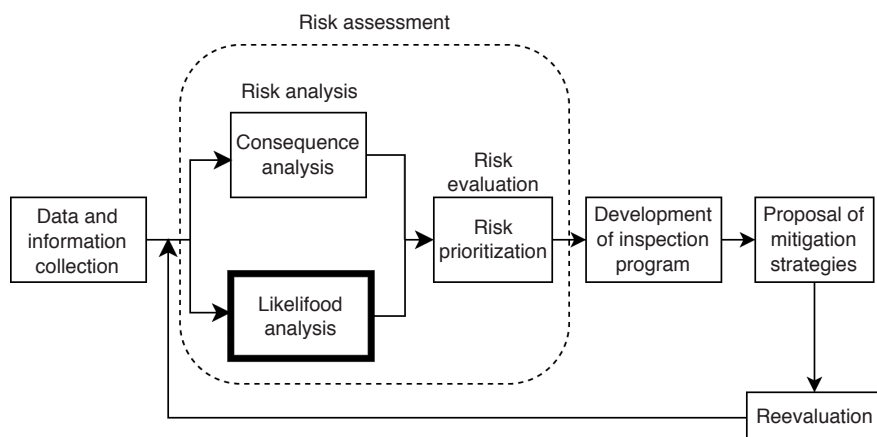


Fig. 10 Procedure of risk based inspection

Table 2 Definitions of damage states

Damage state	Definition
1	Damage does not exceed the predicted value of the damage model
2	Damage is at least equal to the predicted value of the damage rate model and at most twice that value
3	Damage is at least twice and at most four times the predicted value of the damage rate model

Table 4 Relation between inspection effectiveness and confidence

Damage rate state	Poorly effective	Fairly effective	Usually effective	Highly effective
1	0.33	0.5	0.7	0.90
2	0.33	0.3	0.2	0.09
3	0.33	0.2	0.1	0.01

Table 3 Allocation of initial confidence level

Actual damage rate range	Low reliability data	Moderate reliability data	High reliability data
Predicted rate or less	0.5	0.7	0.80
Predicted rate to two times rate	0.3	0.2	0.15
Two to four times predicted rate	0.2	0.1	0.05

とを前提にすれば、将来の減肉も予測することができる。これに基づいて破損確率評価を行い、リスク評価結果を参考に検査計画の見直しが行われる。この場合、腐食速度を適切な非破壊検査法で的確に評価することが重要になる。しかし、精度の低い非破壊検査法で計測する場合、それに伴って、評価される腐食速度の精度も低下する。その意味で、非破壊検査法の有効性の評価が重要となるが、その有効性は対象とする損傷の種類と、非破壊検査法の組み合わせで決まる。この有効性のことを、検査有効度と呼ぶが、評価する腐食速度の精度は、検査有効度の評価も必要である。しかし、この検査有効度は、客観的な量として表現できるものではなく、主観による評価が入ってくることを避けることができない。腐食速度の評価に、ベイズの定理を応用することにより、このような検査有効度というあいまいな量の評価も取り込んだ上で、腐食速度の精度評価に活用されている。以下に、具体的な説明を加える。

手順1

対象とする損傷メカニズムについて、過去の知見から何らかの結論を下す必要がある。代表的なものとして、全面腐食、局部腐食などが存在するが、例えば全面腐食と判断する。初期の段階では一般に腐食速度データを得ることは困難であるが、過去の検査データが存在するのであれば、それをもとに概算で評価する。もし存在しないのであれば、文献データに基づき減肉速度の予測値を与える。ここでは、文献値などから可能な予測値として 0.2 mm/year を設定するものとする。

手順2

手順1で設定した腐食速度の信頼度のレベルを low, moderate, high のいずれに該当するかを決定する。完全なフィールドデータが存在すれば、high に分類できるが、この例題で採用するような既存データが存在せずに推測し

た場合には low に分類される。API ガイドラインには、詳細な分類の基準が示されている。ベイズの定理の予測対象は、腐食損度そのものではなく、現状で用いている減肉速度の精度を三つの状態に分類し、いずれに該当しているかの確信の度合いをベイズ更新していく。その三つの精度の状況を表2に示す。ベイズ定理適用のための三つの損傷状態に対する初期の確信の度合い、つまり事前確率を表3に示す。

手順3

表2で定義した損傷状態に対する確信の度合いをベイズ更新していく。損傷状態は、検査により評価される結果のあいまいさの程度を示し、大きいほどあいまいさの程度が大きいことを示す。その確信の度合いは、上述の検査有効度に依存する。採用している非破壊検査法や、検査体積率によって、損傷評価の精度は異なる。高精度の非破壊検査法で、100%の体積検査を実施すれば表2の損傷状態1である確信の度合いは高まるであろう。この有効性の尺度が検査有効度である。検査有効度に応じて確信の度合いは変わる。検査有効度ごとに、損傷状態と、正確に測定できる確信の度合いとの関係が表4のように与えられている。この表は、エキスパートなどの意見をもとに作成されたものと思われる。

この値は、のちのベイズ更新において、各損傷状態に対する条件付き確率の意味をもつ。つまり、現状の損傷状態が三つのいずれかの状態にある、という条件付きで、予測値通りの速度が観察される確率を示している。

手順4

検査の実施によって各損傷状態に対する確信の度合いがどのように変化するか、ということをベイズ更新により実施する。つまり、検査時の結果に基づいて、確信の度合いをベイズの定理を用いて更新する。ベイズの定理は以下の

式により適用する。

$$P[A_i|B_k] = \frac{P[B_k|A_i]P[A_i]}{\sum_j P[B_k|A_j]P[A_j]} \quad (27)$$

ここで、各記号の意味は以下の通りである。

$P[A_i]$ 事前確率: 損傷状態が i である確信の度合い

$P[A_i|B_k]$ 事後確率: 検査時の事象が A_k (式では B_k と表示) であったときに、更新された確信の度合い

$P[B_k|A_i]$ 条件付確率: 現状の損傷状態が i であるときに、損傷状態 k が観察される条件付き確率。API の中では、これを検査有効度に対応付けている。表 4 は $i = 1, 2, 3; k = 1$ に対する値を示すものであるが、規格の中には $i = 1, 2, 3; k = 2, i = 1, 2, 3; k = 3$ に対する表も別途用意されている。

初回の検査時に、Usually effective の非破壊検査を用いて検査したところ、予測通りの腐食速度が観測されたとすると、ベイズ更新の手続きは次のようになる。

1. 事前確率は文献データに基づいているので、 $P[A_i]$ として表 3 の low reliability data を採用する
2. 検査有効度として Usually effective、予測通りの腐食速度が確認されたことをもとに表 4 の該当部分の数値を採用する。
3. 検査時の結果が、損傷速度が予測通り、つまり B_1 であったものとして評価する

この結果式 (27) 内の各変数の対応関係は以下のようになる。

$$\begin{aligned} P[A_1] &= 0.5, P[A_2] = 0.3, P[A_3] = 0.2 \\ P[B_1|A_1] &= 0.7, P[B_1|A_2] = 0.2, P[B_1|A_3] = 0.1 \end{aligned} \quad (28)$$

これらの数値を式 (27) に代入すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} P[A_1|B_1] &= \frac{0.7 \times 0.5}{0.7 \times 0.5 + 0.2 \times 0.3 + 0.1 \times 0.2} = 0.814 \\ P[A_2|B_1] &= \frac{0.2 \times 0.3}{0.7 \times 0.5 + 0.2 \times 0.3 + 0.1 \times 0.2} = 0.140 \\ P[A_3|B_1] &= \frac{0.1 \times 0.2}{0.7 \times 0.5 + 0.2 \times 0.3 + 0.1 \times 0.2} = 0.046 \end{aligned} \quad (29)$$

つまり、表 5 が得られる。

この結果、損傷状態が 1 である確信の度合いが高まった。このように、検査有効度という主観的尺度も取り込んだ形で、現状の損傷速度状態の確信の度合いをベイズ定理により更新していくことを実現している。以後、検査のたびごとに、この手続きを実施すれば、現状の損傷速度状態の把握をすることが可能となる。

手順 5

損傷状態 1 の予測速度 0.2 mm/year、状態 2 の最悪予測速度 0.4 mm/year、状態 3 の最悪予測速度 0.8 mm/year を

Table 5 Confidence level after first inspection

Damage rate state	After a usually effective inspection—
1	0.814
2	0.140
3	0.046

もとに、次回検査時の破損確率を損傷状態ごとに評価できる。ここから先は細かい手続きとなるので省略するが、各状態での破損確率と、表 5 の確信度合いとから、総合的な破損確率を評価する手順となっている。これと、影響度評価との積からリスク評価を行っている。

6. まとめ

本稿においては、複合材料水素タンクなどに対する破裂強度の統計的性質の取得を目的とするとき、ベイズの定理の活用が有効であることを示した。その最大の理由は、コスト、労力の観点から大量の破裂強度データの取得が困難であり、標本統計学による評価が困難であることによる。ベイズの定理の活用により、小標本のサンプルデータを活用して、ベイズ更新によって母数の確信の度合いを高めていくことが可能である。ただし、初期の確信度である初期事前分布の設定は、任意性が伴うことから、場合によっては主観に基づいて設定するなど、取り扱いにくい側面もある。本稿では、ベイズ統計学の基本から、応用に至るまで例題を交えて説明を加えた。本稿が、小標本統計データ取得のために少しでも貢献できれば幸いである。

参考文献

- [1] G. W. Mair, 'Safety Assessment of Composite Cylinders for Gas Storage by Statistical Methods', Springer International Publishing AG 2017, doi: 10.1007/978-3-319-49710-5
- [2] 酒井信介. 信頼性設計の導入に向けて. *Honda R&D Technical Review*, Vol. 37, p. 1-11
- [3] 酒井信介. リスクベース検査における機器の破損確率データ収集のためのベイズ定理の応用 (第一報ベイズの定理の原理). 圧力技術, Vol. 42, No. 5, pp. 284-290, 2004. doi: 10.11181/hpi.42.284
- [4] 酒井信介. リスクベース検査における機器の破損確率データ収集のためのベイズ定理の応用 (第二報ガイドラインの中での利用). 圧力技術, Vol. 43, No. 1, pp. 22-27, 2005. doi: 10.11181/hpi.43.22
- [5] Gilks, W. R., Richardson, S., Spiegelhalter, D.: Markov Chain Monte Carlo in Practice, Chapman and Hall/CRC, 512p., (1995), doi: 10.1201/b14835

- [6] ベイズ統計学 (分散が既知の場合), 2018. https://www.data-arts.jp/bayesian_statistics/normal_distribution/known_variance.html, (参照 2024/12/24).
- [7] 平均と分散がともに未知の正規分布のベイズ更新. <https://qiita.com/raidofuwa/items/f665b96b0233674727be>, (参照 2024/12/24).
- [8] 報酬が平均・分散が未知の正規分布に従うと仮定した Thompson Sampling, 1998. <https://cafeunder.github.io/rosenblock-chainers-blog/2018/03/07/bayesian-gaussian-mean-sigma.html>, (参照 2024/12/24).
- [9] American Petroleum Institute. *API publication 581, Risk based inspection: Base resource document, 1st edition*, 2000.
- [10] 日本高圧力技術協会. HPIS Z107-1TR~4TR リスクベースメンテナンスハンドブック, 2010.

■ 著 者 ■



酒井 信介