

非圧縮・圧縮性流体統一解法の開発

Development of Universal Solver for Incompressible and Compressible Flow Simulation

山口 義博*

Yoshihiro YAMAGUCHI

要 旨

本研究では、数値流体計算における物理量の移動計算を流速による移流作用と音波による伝播作用とに分離する手法を開発し、弱圧縮性・圧縮性流体の統一解法を新たに構築した。本手法は各速度域での検証問題により原理検証がなされ、その妥当性が確認された。更に、現実的な三次元乱流解析のための、非構造格子法による複雑形状への対応、計算効率化のための並列計算機能、乱流モデルの実装がおこなわれた。開発した解析コードを三次元矩形翼の乱流計算に適用した結果、計算精度、計算効率ともに統一解法としての実用性が確認された。

ABSTRACT

A numerical methodology that decomposes a fluid motion into the convection due to the flow material velocity and the transportation of the sound wave was newly developed and then a unified flow solver for all-speed flow regime was conducted. The developed flow solver has been validated using bench mark problems. Furthermore, the solver has been extended to practical one for an engineering purpose, such as three-dimensional turbulent flow, by implementing an unstructured grid method, a parallel computation technique, and a turbulence model. Availability as a unified flow solver in practical use has been confirmed by solving a flow field around three-dimensional wing.

1. はじめに

近年まで数値流体力学 Computational Fluid Dynamics (CFD) は、大きく非圧縮性解法と圧縮性解法の二つに、解析手法と研究者が分かれて別々の発展をたどってきた。その理由は単純に解析対象が異なってきたからというだけではない。Fig. 1に示すように流れの速度、温度の特性の違いにより解析手法が大きく異なっており、互いの領域を解くことができないことが背景にある。この境界線は“圧縮性限界”とよばれ、およそここを境として解析手法の使い分けがなされている。しかしながら、現実には液体、気体を問わず、流体には少なからず圧縮性が存在する。そのため、非圧縮性流体とは、非圧縮性解法により求められる密度変化の無いモデル化された状態を意味する。よって厳密には、現実の流体現象と分けて考える必要がある。本論文では、圧縮率もしくは熱膨張率が5%未満の流体を“弱圧縮性流体”と定義し、以後の議論を進める。

先に述べたように、これまで設計者は流体現象ごとに解法を使い分けて解析をおこなってきたが、圧縮性限界をはさんだ流体現象や、弱圧縮性流体の解析では、何らかの仮定

やモデルを導入するか、あるいは、信頼性は落ちるものの、収束性が低下した解析に頼らざるを得なかった。

近年の計算機の発達に伴い、複雑かつ大規模な解析対象を一度に解くことが可能となってきた。例えばガスタービンエンジンやレシプロエンジンの入口から出口までが相当

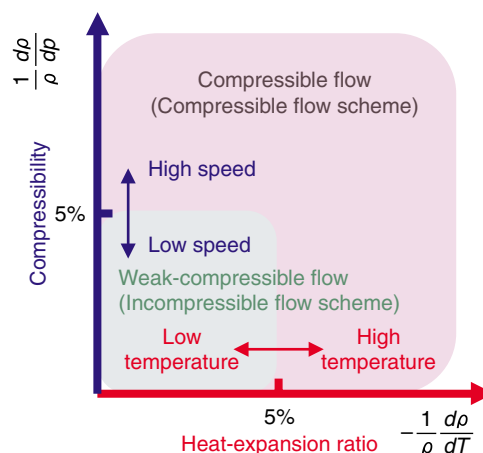


Fig. 1 Schematic of relation between flow phenomena and numerical method

*和光基礎技術研究センター

する。内部には、低速から高速までの流れが混在し、低速流れ内でも、燃焼による温度差により密度変動が存在する。従来法では、現象に応じて機械要素毎に分割して、解法を変更して解析せざるを得ない。しかしながら要素間の干渉の分離は難しく、境界条件のあいまいさや矛盾が生じ、解析精度の低下は避けられない。

もし流体の全領域を統一して解くことができ、複雑かつ大規模な問題への対応がなされれば、上記の課題を同時に解消する強力なツールとなる。つまり、モデルや仮定を導入せず、境界条件を入口と出口ともに大気状態等に明確に設定した解析が可能となり、各要素性能と全体性能ともに信頼性の高い解を得ることができる。

本研究の目的は、弱圧縮性流体と圧縮性流体が混在する流れや、圧縮性限界付近での流体现象を統一アルゴリズムで解く CFD スキームを構築することにある。また、それらの現象が存在する、複雑かつ大規模な問題への適用を考慮し、以下の3項目に対応する。(1)乱流モデルの実装。(2)複雑形状に対応するためのハイブリッド計算格子への対応。(3)大規模問題における計算負荷を下げるための計算の並列化。以上の特徴をもつ解析コードを開発し、検証問題と実用問題において良好な結果を得たので報告する。

2. 従来法との比較

非圧縮性解法と圧縮性解法で、互いの計算領域を解けない主たる理由と、本解法の特徴を挙げる。

(1)非圧縮性解法が圧縮性流れを解けない理由：

完全 Navier-Stokes(NS.)方程式から、密度一定の仮定により導出された、簡略化された支配方程式(質量保存式、運動量保存式)を解く。またエネルギー保存式は連立式として扱わない。このため流体の圧縮性は考慮することができない。

(2)圧縮性解法が弱圧縮流れを解けない理由：

完全NS.方程式を支配方程式として扱う。方程式は質量、運動量、エネルギーの保存則より構成されており、弱圧縮性現象も表現する。密度や運動量など流体のマクロな性質を表現しており、流体分子の流速移動や圧力伝播や摩擦による熱生成等を、巨視的に連続体として扱うことに他ならない。このことは移動現象に注目したNS.方程式の固有値解析より、「物理量の移動は流速と音波(圧力波)によりおこなわれる」と証明できることからわかる。一方、圧縮性解法では、流速と音速による移動計算を同時におこなう手法をとる。そのため、音速に比べ流速のスケールが非常に小さくなる弱圧縮性流体の解析では、スケールの違いによる誤差が累積し、計算の収束性の悪化や破綻が生じる。

(3)本解法の特徴：

スケールが違う流速と音速をいかに扱うかが、統一解法開発の鍵となる。スケールをそろえる前処理行列を方程式

に掛けて、擬似的な時空間で移動計算をおこなう手法として、Preconditioning 法⁽¹⁾⁻⁽³⁾が提案されている。また、流速と音波による移動計算を分離して、別々におこなう手法^{(4),(5)}も提案されている。どちらもまだ研究段階であり、実用レベルで汎用的に使われている手法はほとんど無い。

本解法でも、支配方程式として完全NS.方程式を取り扱う。ここで、改めて完全NS.方程式の特性を見直す。先に述べたように弱圧縮性領域では、流速と音波での移動効果が分離する。流速による移動は、風上から風下への一方向性をもつ双曲形方程式で表現できる。一方、音波は圧力波源や境界を端とした定常波としての性質をもつため、だ円形方程式で表現できる。本解法ではそれぞれの方程式系の特性を活かすよう、流速による効果と音波による効果を分離することで、統一解法の構築をおこなった。一段階目として、先ず流速による移動計算を、従来の圧縮性解法の知見を活かしておこなう。次に、音波による伝播効果は、漸近的に境界値問題に近づくように取り扱う。また、運動量保存式における圧力の寄与分は流速によるものと、音波によるものであることが証明できる⁽⁶⁾ため、圧力寄与も分離して、圧力計算の高精度化を図る。

3. 支配方程式

完全NS.方程式より導いた非保存形の式、質量保存式(1)、運動量保存式(2)、温度方程式(3)を支配方程式とする。ここで温度方程式は、エネルギー保存式に質量保存式と運動量保存式を代入して導出する。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (-p \mathbf{I} + \Pi) \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \frac{1}{C_v \rho} \{-p(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{k} \nabla T + \Pi : \nabla \mathbf{u}\} \quad (3)$$

ここで ρ , $\mathbf{u}$, p , T はそれぞれ密度、速度ベクトル、圧力、温度を表わし C_v , Π , $\mathbf{k}$ は等積比熱、粘性テンソル、熱伝導率を表す。また $\mathbf{I}$ は単位行列である。

加えて、実用計算においては $k-\epsilon$ 乱流モデル^{(7),(8)}を用いる。ここでの k は乱流エネルギーを表わす。

4. 分離解法

式(1)-(3)を多段解法により時間刻みで($n \rightarrow n+1$)まで進める。一段目を流速のみによる物理量の移動をおこなう移流段(時間刻み $n \rightarrow *$)とよぶ。二段目を音波の式に基づき、圧力の微小擾乱による物理量の伝播をおこなう等エントロピー段(時間刻み $* \rightarrow **$)とよぶ。三段目は粘性や

熱流束を計算する粘性段(時間刻み $n \rightarrow n+1$)である。等エントロピー段では境界値問題を解くため、圧力方程式を導出する。ここで、運動量保存式における($n \rightarrow n+1$)時間刻みでの圧力勾配項の時間変動を $\nabla p^{**} = \nabla(p^n + \phi)$ と分離する。ここで ϕ は $\phi = p^{**} - p^n$ となる値で、圧力の微小擾乱量となる。分離による効果は次の二つである。一つは圧力方程式を解く際に、圧力を直接変数としないことにより、誤差の累積を緩和すること。もう一つは圧力勾配項を流速時間スケールでの寄与分と音速時間スケールでの寄与分とに分離して、それぞれ適した移動計算をおこなう⁽⁹⁾ことである。

三段階の分解を具体的に式(4)–(6)に示す。

移流段：

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{u} \\ T \end{pmatrix}^* + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{u} \\ T \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -\nabla p^n \mathbf{I} / \rho^* \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

等エントロピー段：

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{u} \\ T \end{pmatrix}^{**} = \begin{pmatrix} -\rho^* \nabla \cdot \mathbf{u}^{**} \\ -\frac{\nabla \phi \mathbf{I}}{\rho^*} \\ -\frac{p^* \nabla \cdot \mathbf{u}^{**}}{C_v \rho^*} \end{pmatrix} \quad (5)$$

粘性段：

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{u} \\ T \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\nabla \cdot \Pi^{n+1}}{\rho^*} \\ \frac{\nabla k \cdot \nabla T^{n+1} + \Pi^{**} : \nabla \mathbf{u}^{**}}{C_v \rho^{**}} \end{pmatrix} \quad (6)$$

次節では、各段における解法について示す。

4.1. 移流段

移流計算の手法は、移流作用が支配的となる圧縮性解法において発展してきた。それは近似リーマン解析手法とよばれ、シャープにかつ振動を起さずに、物理的な不連続である衝撃波を捕獲することがポイントとなる。本手法も衝撃波の生じる流れ解析を考慮し、近似リーマン解法を参考とした。式(4)に示すように変数が保存変数ではなく原始変数で、かつ非保存形であるため、近似リーマン解法をそのまま適用することはできない。また、厳密に衝撃波をとらえるには数理上の課題も生じる⁽¹⁰⁾。そのため、如何に低速から高速までに対応する風上化をおこなうかが鍵となる。式(4)より、物理量の移動は流速 $\mathbf{u}$ のみに依存することがわかる。しかしながら、流速に依存しない項として、運動量保存式の右辺に圧力勾配項が存在する。流速項と圧力勾配項をそれぞれ分離して風上化するために、近似リーマン解法

の一つである AUSM 法⁽¹¹⁾を参考にして離散化をおこなった。この圧力の風上化が圧力計算の高精度化に寄与する。

4.2. 等エントロピー段、粘性段

ここでは、音波による移動効果が、漸近的に境界値問題となるように解きたい。圧力方程式を導出するため、状態方程式の時間による全微分に式(5)を代入する。

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^*} \nabla \phi \right) - \frac{\phi}{\gamma \Delta t^2 p^*} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t} \quad (7)$$

式(7)を SOR 法、残差切除法⁽¹²⁾等の一般的な行列解法で解く。圧力の計算後、密度、速度、温度を計算する。

粘性段では、等エントロピー段での値を使って計算をおこなった後、時間刻みを一つ進める。

5. 離散化

5.1. 空間離散化

計算格子上への物理量配置として二つの方法が考えられる。一つは全物理量を同じ点に持たせるコロケート配置で、他方は密度、圧力、温度等をセル中心に配置し、速度を格子面上に配置するスタッガード配置である。圧力方程式の導出過程を考慮すると、本手法ではスタッガード配置が望ましい。しかしながら、離散化式の保存性の維持を目的とし、かつプログラム開発での複雑さを回避するためコロケート配置を採用した。また、複雑形状の計算にも柔軟に対応できるように、セル中心有限体積法(FVM)をベースとして二次元計算、三次元計算ともにハイブリッド格子に対応した。衝撃波をシャープに計算するためには、移流段での空間精度が大きく影響する。しかしながら、FVMではステンシルを広く取ることができないため、Monotone Upstream-Centered Schemes for Conservation Laws(MUSCL)内挿により空間二次精度とした。

5.2. 時間離散化

定常計算には計算時間の短縮のため、局所時間刻み法を取り入れた時間一次精度でおこなう。時間発展での計算安定化のために、移流段と粘性段においては LU-SGS 法⁽¹³⁾を用いた陰的計算をおこなう。一方、非定常計算ではクランク・ニコルソン法により時間二次精度とした。移流段と粘性段では LU-SGS 法にニュートン・ラプソン法を組み合わせ、Dual-Time Stepping法⁽¹⁴⁾により時間精度を維持している。

6. 並列計算

本手法は、移流段において圧縮性解法の AUSM 法と同等の計算負荷があり、更に等エントロピー段で圧力方程式を解く負荷があるため、圧縮性解法に比較して計算負荷が高

くなる。高負荷を分散し、計算のターンアラウンド時間を短縮させるため、並列計算手法を取り入れた。

並列化手法として領域分割法を採用し、合わせてプログラム上の変数配列を動的に取得させた。従って、メモリ分散型の並列計算機に対しては、要求するメモリを各ノードに分散させることができるため、大規模計算が可能となる。領域分割法としては、METIS 法⁽¹⁵⁾を採用し、1 ノード内の負荷を均等にしている。また、隣接領域間でのデータ交換は、各領域境界上に配置された仮想セルの物理量のみおこなう。この方法により、ノード間で交換するデータ量と通信時間を最小限にとどめた。Fig. 2 に 1CPU での計算時間を 1 として無次元化した実測値と理論値を示す。計測に使用した格子数は約 110 万であり、実用レベルの格子数において、理論値に近い並列化の効果が得られていることがわかる。

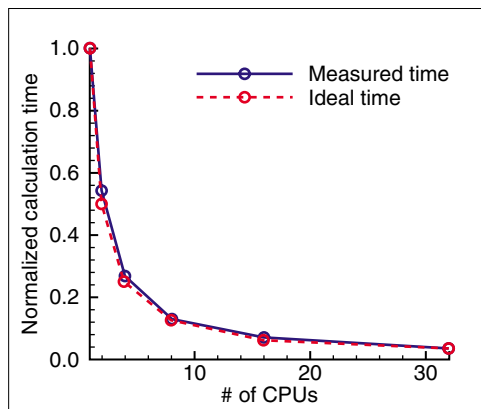


Fig. 2 Normalized calculation time between measured and ideal time

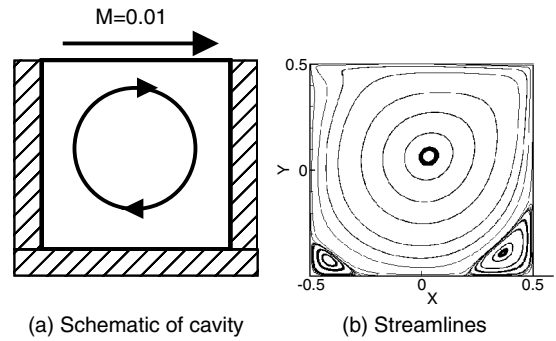
7. 検証

典型的な弱圧縮性流れに対する問題と、圧縮性流れに対する問題を用いて、本解法の検証をおこなう。

7.1. 弱圧縮性流れ解析の検証

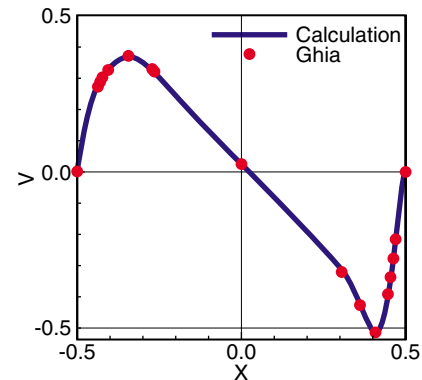
弱圧縮性の粘性解析をキャビティー内流れにて検証した。計算条件はレイノルズ数が1000、開口部のマッハ数が0.01である。解析のイメージ図を Fig. 3(a) に示す。Fig. 3(b) に計算より得た流線を、Fig. 3(c) は $y=0$ 上での速度 v の分布を、Fig. 3(d) には $x=0$ 上での速度 u の分布を示す。速度分布は Ghia ら⁽¹⁶⁾の検証データと比較している。

主流渦の速度分布は検証結果と良く一致している。また、Ghia らの結果と同様に二次渦も捕えられている。これより弱圧縮領域の粘性流れにおける、本解法の妥当性が確認できた。

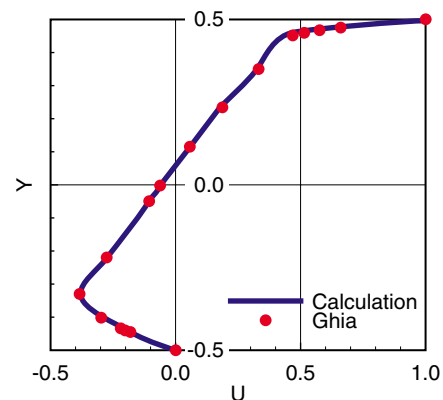


(a) Schematic of cavity flow problem

(b) Streamlines



(c) Profile of v-velocity along $y=0$



(d) Profile of u-velocity along $x=0$

Fig. 3 Validation results for cavity flow at $Re=1000$, $Min=0.01$

7.2. 圧縮性流れ解析の検証

圧縮性解析を Sod の一次元衝撃波管問題⁽¹⁷⁾にて検証した。本問題では初期状態として、管中央の仕切りをはさんで左右に圧力比 $P_L/P_R=10$ 、密度比 $\rho_L/\rho_R=8$ の静止状態の気体を満たす。検証は、仕切りをはずした後の非定常な超音速流れを、理論解と比較することでおこなわれる。Fig. 4(a)は衝撃波管の初期値のイメージ図を、(b), (c) は 0.1415秒後の密度、速度の分布を示す。

非保存形を支配方程式とした場合、衝撃波でのエントロピージャンプを弱解として認めることができないため、衝撃波位置が理論解より遅れることが指摘されている⁽¹⁰⁾。しかし、本手法においては良好な結果が得られている。

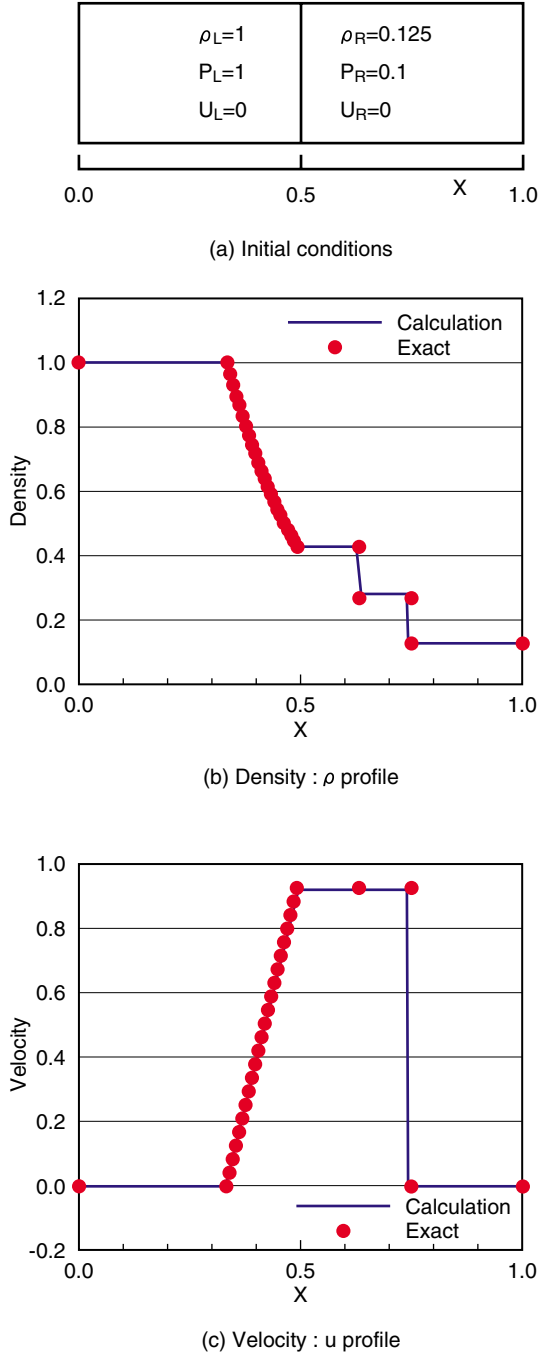


Fig. 4 Validation results for the Sod's problem

7.3. 二次元翼型周り流れの検証

先の二つの検証により、内部流れにおいて弱圧縮性流れと圧縮性流れが、本手法により解析可能であることを確認できた。次に物体周り流れの検証として、二次元NACA0012翼型周りの非粘性計算をおこなった。他の統一解法の一つ

である local-preconditioning法では、淀み点におけるパラメータ依存性のため、人工的な処理を必要とする⁽¹⁾⁻⁽³⁾。そのため、本検証には淀み点近傍での非物理的な挙動の有無を、弱圧縮性流れから圧縮性流れまでの解析にて確認する。主流速度は $M_\infty=0.005$ の弱圧縮：Fig. 5(a), $M_\infty=0.6$ の高亜音速：Fig. 5(b), $M_\infty=0.9$ の遷音速：Fig. 5(c)である。迎角は全て0度である。図のコンターはそれぞれの主流速度で無次元化された速度の絶対値である。よって、(a) - (c) のコンターの色は直接比較はできない。

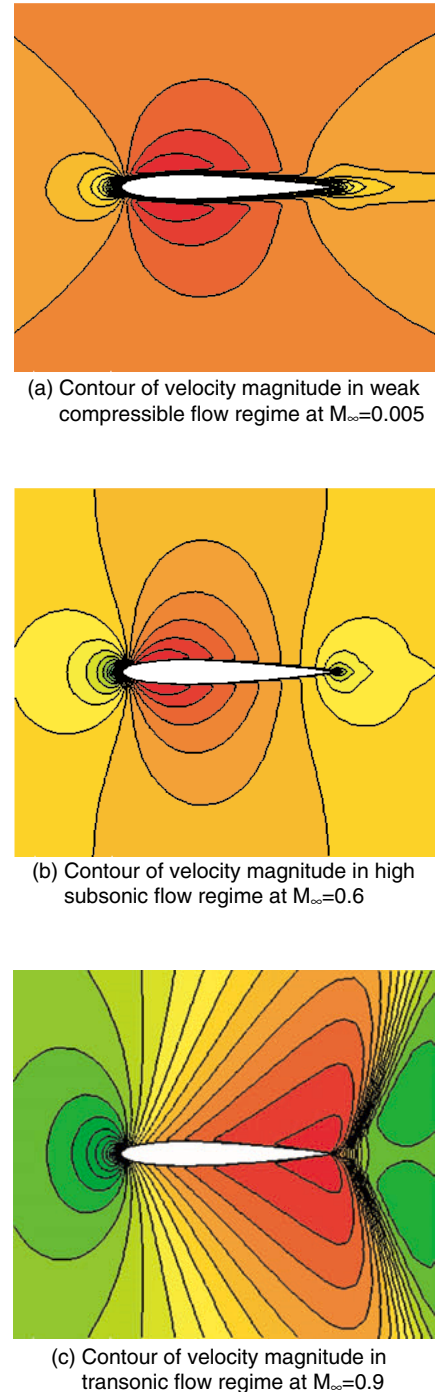


Fig. 5 Contours of velocity magnitude around NACA0012 airfoil

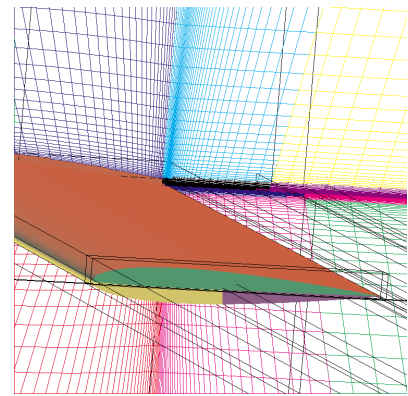
非圧縮性解法では、弱圧縮性解析の Fig. 5(a) と同じ計算結果は得られるが、圧縮性の影響が出る (b), (c) については同様の結果を得ることはできない。一方、圧縮性解法においては、(b), (c) と同様の結果を得ることができるものの、弱圧縮性の領域となる (a) の計算では、解が収束せず非物理的な解となる。本手法においては、弱圧縮性の低速から、衝撃波の生じる高速まで、適切な速度分布の収束解が得られた。これより淀み点のある物体周りの問題に対しても、広い速度域で適用可能と判断できる。

8. 三次元翼周り計算

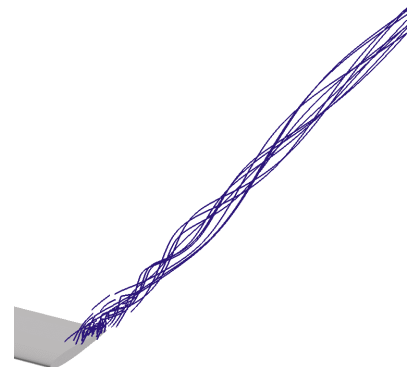
実用問題レベルの解析対象として、三次元NACA0012翼周りの乱流解析をおこなった。解析条件として空港での航空機の離発着時を想定し、低速、高迎角とする。高迎角となる理由は、低速での翼負荷を上げるためであるが、その翼上下面での圧力差が、強い翼端渦を発生させる原因となる。この翼端渦は残留渦となり、空港上空においては、次に離発着する航空機との干渉を避けるための待機時間に影響する。そのため、安全性の確保及び、離発着数の拡大のため、CFDによる翼端渦の予測が多くおこなわれている。しかしながら、従来法による解析においては速度域が圧縮性限界付近であるため、計算の収束性が悪く解の信頼性が低くなる。更に、数値計算上の非物理的な粘性(数値粘性)の影響により、計算手法や計算格子に依存して、残留渦が実際より早く拡散してしまうことが指摘されている⁽¹⁸⁾。よって、本解析手法の特長となる統一解法であることと、圧力の高精度な計算手法であることを活かし解析をおこなった。

総計算格子数は1157856で、数値拡散の影響を減らすため全六面体格子とした。計算領域は16領域に分割し並列計算をおこなった。分割した領域毎に色分けして Fig. 6(a) に示す。翼アスペクト比は3、主流マッハ数は0.12、迎角は10度、レイノルズ数は 0.9×10^6 である。

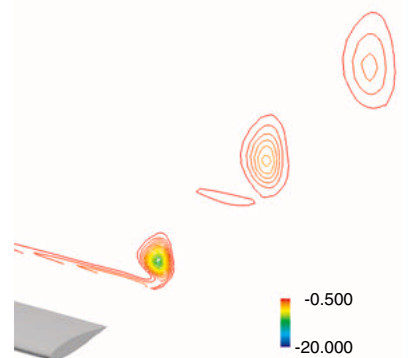
翼端渦の様子を Fig. 6(b) に流線で示す。翼端渦が翼端上面に発生し、粘性効果により緩やかに減衰しているのがわかるが、コード長の10倍以上後流までも捕えられており、数値拡散の影響は低いことが示された。次にヘリシティのコンターを Fig. 6(c) に示す。コンター位置はコード長の2, 4, 6倍の後流に相当する。ヘリシティ h は $h = \mathbf{u} \cdot \text{curl} \mathbf{u}$ で定義され、絶対値の最大値は渦中心を表し、符号は渦の回転方向を示す値である。図中で風上側から見て、負の値は反時計回りの渦を、正の値は時計回りの渦を意味する。ヘリシティは、翼端渦と後流以外の場所ではほぼゼロの値となるため、図ではスケールの調整をおこなっている。翼端渦に相当する場所では負の値をもっており、先の流線の図と同様、反時計回りの渦が生じていることがわかる。ヘリシティと同位置での乱流粘性比のコンターを Fig. 6(d) に示す。現実的な計算負荷で、より実際の現象に近い解析をおこなった



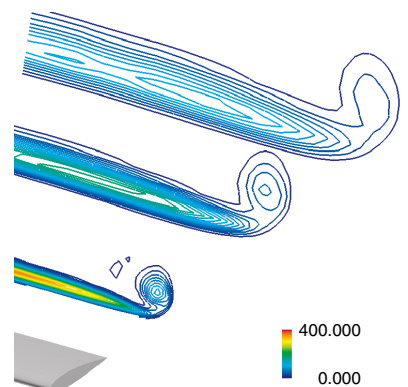
(a) Calculation grid divided by METIS method



(b) Streamlines around NACA0012 rectangular wing by turbulent calculation



(c) Helicity contours at 2, 4, and 6-chord downstream from trailing edge by turbulent calculation



(d) Contours of turbulent viscosity at 2, 4, and 6-chord downstream from trailing edge

Fig. 6 Results of a wingtip vortex calculation around NACA0012 rectangular wing

めには、乱流モデルの導入は不可避である。図より翼後流及び渦位置での流れにせん断がある場所に、乱流粘性が適切にはたっていることがわかる。以上により、大規模、複雑現象解析に対する三次元の統一解法コードの実用性が確認できた。

9. まとめ

数値流体計算手法として、非圧縮性・圧縮性流体解析のための統一解法を新たに構築した。原理検証のための弱圧縮性領域から圧縮性領域までの内部流、外部流の解析で良い一致が確認できた。乱流解析機能と複雑形状の解析機能を付加して、より現実的な問題である三次元翼周り計算をおこない、統一解法としての実用性が確認された。更に並列計算機能の実装がなされ、理論値に近い計算負荷の分散が可能とした。今後はコードの特性を活かすべく、解析対象としてガスタービン内部流れ解析やレシプロエンジン内部解析、また、現象解析として圧力変動が影響する燃焼解析、騒音解析等に適用していく。

参考文献

- (1) Turkel, E.: Preconditioned Methods for Solving the Incompressible and Low Speed Compressible Equations, J. Comput. Phys., Vol.72, No.2, p.227-298(1987)
- (2) Choi, Y. H., Merkle, C. L.: The Application of Preconditioning in Viscous Flows, J. Comput. Phys., Vol.105, p.207-223(1993)
- (3) Turkel, E., Vatsa, V. N., Radespiel, R.: Preconditioning Methods for Low-Speed Flows, AIAA paper, 96-2460 (1996)
- (4) Hah, C.: Navier-Stokes Calculation of Three-Dimensional Compressible Flow Across a Cascade of Airfoils with an Implicit Relaxation Method, AIAA paper, 86-0555(1986)
- (5) Yabe, T., Wang, P. Y.: Unified Numerical Procedure for Compressible and Incompressible Fluid, J. Phys. Soc. Japan, Vol.60, No.7, p.2105-2108(1991)
- (6) Rehm, R. G., Baum, H. R.: The Equation of Motion for Thermally Driven Buoyant flows, J. of Research of the National Bureau of Standards, Vol. 83, p.297(1978)
- (7) Wilcox, D. C.: Simulation of Transition with a Two-Equation Turbulence Model, AIAA Journal, Vol.32, No.2, p.247-255(1994)
- (8) Wilcox, D. C.: Reassessment of the Scale-Determining Equation for Advanced Turbulence Models, AIAA Journal, Vol.26, No.11, p.1299-1310(1988)
- (9) Yamaguchi, Y., Arima, T., Obayashi, S., Nakahashi, K.: Simulation of Aircraft Wake Vortex Using Pressure-based Unified Numerical Approach for Incompressible and Compressible Flows, AIAA Paper, 04-0077(2004)
- (10) Leveque, R. J.: Finite Volume Methods for Hyperbolic Problem, CAMBRIDGE TEXTS IN APPLIED MATHEMATICS(2002)
- (11) Liou, M.-S.: Progress Towards An Improved CFD Method: AUSM+, AIAA Paper, 95-1701-CP(1995)
- (12) Tamura, A., Kikuchi, K., Takahashi, T.: Residual Cutting Method for Elliptic Boundary Value Problems: Application to Poisson's Equation, J. Comput. Phys. No.137, p.247-264(1997)
- (13) Jameson, A., Yoon, S.: Lower-Upper Implicit Schemes with Multiple Grid for the Euler Equations, AIAA Journal, 30, No.11(1992)
- (14) Pulliam, T. H.: Time Accuracy and the Use of Implicit Methods, AIAA paper, 93-3360(1993)
- (15) <http://www-users.cs.umn.edu/~kaypis/metis/>
- (16) Ghia, U., Ghia, K. N., Shin, C. T.: High Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method, J. Comput. Phys., No.48, p.387-411(1982)
- (17) Sod, G. A.: A Survey of Several Fluid Difference Methods for System of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws, J. Comput. Phys, No.27, p.1-31(1978)
- (18) Murayama, M., Nakahashi, K., Obayashi, S., Kato, T.: Numerical Simulation of Vortical Flows Using Vorticity Confinement Coupled with Unstructured Adaptive Grid Refinement, Computational Fluid Dynamics Journal, Vol.10, p.28-36(2001)

■著 者■



山口 義博