動的崩壊問題における３次元大変形梁要素の定式化

Novel Formulation of the 3D Large Deformation Beam Element for Dynamic Crash Analysis

高　田　賢　治*　　Wlodek Abramowicz**
Kenji TAKADA

要　旨

薄肉断面フレームの動的な大変形問題を解析するために，梁要素の新しい定式化を行なった．本梁要素はFEM理論，スーパエレメント法，実験データ，剛体力学の手法を組合わせることにより構築した．更に，非線形問題の取り扱いを容易にするため，オブジェクト指向技術を用いてプログラミングを行った．実験，FEM計算との比較から，本定式化の妥当性，有効性を確認することができ，３次元 CAD データがないレイアウト段階における高速な初期検討ツールを開発した．

ABSTRACT

The paper presents new Object Oriented Formulation of the FE algorithm that encompasses traditional FE, Super Element, experimental data and rigid body mechanics in a single calculation environment. The new formulation is implemented in a software for dynamic crash simulation of an arbitrary 3D frame structure discretized into Super Elements and subjected to large dynamic crash loading. The paper presents basics of the general algorithm and element formulation. The theoretical part is followed by the discussion of benchmark tests and result of application of the real world structures.

１．まえがき

近年，プリプロセッサ，コンピュータ性能の進歩により，３次元 CAD データから大規模で再現性の高い FE モデルが短時間で作成可能になっている(1)．しかしながら，３次元 CAD データがないレイアウト段階においては，材料力学に基づいた梁モデル計算は初期の検討手法として非常に有効である．

衝突時のフレーム崩壊挙動を梁モデルで解析する場合，その梁要素は以下の要件を満たさなければならない．

- 材料の弾塑性問題を考慮できること．
- 大変形問題を考慮できること．
- 動的問題を考慮できること．
- 軸力，曲げ，ねじりの連成崩壊を考慮できること(2)．
- 部材断面の変形を考慮し，Post-Collapse(崩壊後の挙動)の精度が高いこと．
- データ作成が簡単で，計算時間が短時間であること．

通常の FEM の定式化でこれらの内容をすべて考慮することは不可能である．そこで，著者らはFEM，スーパエレメント法，剛体力学を組合わせた新しい定式化を考案した．

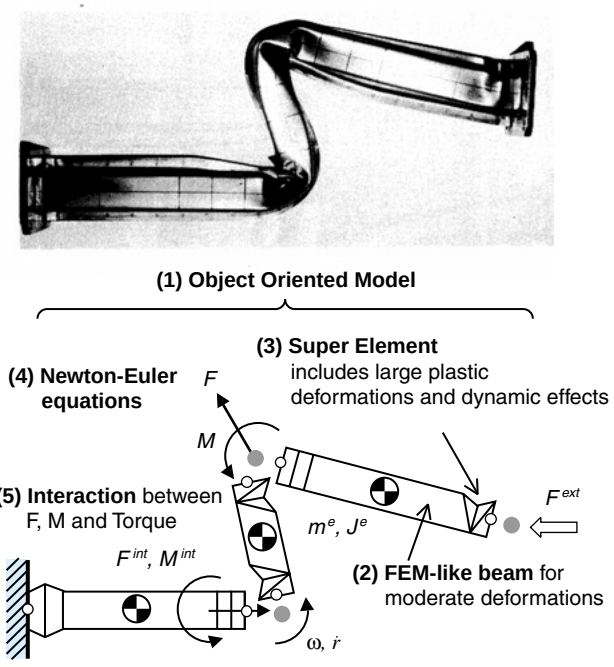


Fig. 1　Object oriented discretization of thin-walled S-frame

＊栃木研究所
＊＊ Impact Design, EUROPE

https://doi.org/10.69239/hondatechnicalreview.2003_15_1_25

更に，複雑な非線形問題の取り扱いを容易にするために，OOF[3]（オブジェクト指向定式化）に基づいてプログラミングを行った．本論文では梁要素（Superbeam）の定式化の説明と実験，FEMとの結果比較から本定式化の妥当性，有効性を示す．

２．本定式化の概要

Fig. 1 に示す薄肉曲がり部材を例にして，本定式化の概要を説明する．

（1）計算モデルは OOF に基づき３個の梁要素でモデル化する．時間積分の解法は中央差分法を用いた．

（2）弾性時の梁の挙動は Euler-Bernoulli の梁理論を用いて計算した．

（3）梁の塑性問題，大変形問題，降伏応力のひずみ速度依存性はスーパエレメント法で得られる結果を導入した．

（4）動的問題を考慮するため Newton-Eluer の運動方程式を用いた．ただし，梁の構成節点とは別の新しい節点点を設け，この節点で動的挙動と姿勢角を計算する手法を開発した．

（5）軸力，曲げ，ねじりの連成崩壊に関しては連続体力学の Co-Rotational 法を用いて要素剛性マトリックスを構築することにより表現した．更に，Post-Collapse 領域での高い精度を得るために崩壊面を逐次更新させる手法を考案した．

３．運動方程式の解法

本定式化では非線形問題を扱うため式（1）に示す仮想速度の原理[4]~[7]（または仮想仕事の原理）を用いた．

$$\delta W(\delta u, u) \equiv \delta W^{in} - \delta W^{ext} + \delta W^{kin} = 0 \qquad (1)$$

ここに，δW^{in} は仮想内部仕事，δW^{ext} は仮想外部仕事，δW^{kin} は運動エネルギーの仮想仕事量である．式（1）を離散化すると式（2）に示す運動方程式が得られる．

$$M\ddot{u} = f^{ext} - f^{in} \qquad (2)$$

ここに，M は質量マトリックス，$\ddot{u}$ は節点加速度ベクトル，f^{in}，f^{ext} はそれぞれ節点外力，節点内力を表わす．

通常，式（2）を中央差分法で解法する場合，その時間ステップルーチン内では要素ごとに処理が実施される（エレメント・バイ・エレメント法）．本定式化では節点ごとの処理と要素ごとの処理を完全に分離する手法を考案した（ノード・バイ・ノード／エレメント・バイ・エレメント法）．

図２にこの手法と運動方程式の関係を示す．式（2）左辺の慣性項は Newton-Euler の運動方程式を用いて節点ごとに処理される．一方，式（2）右辺の荷重項はスーパエレメント法を用いて要素ごとに処理される．

この手法によって異なった理論である剛体力学とスーパエレメント法の組み合わせが可能となった．

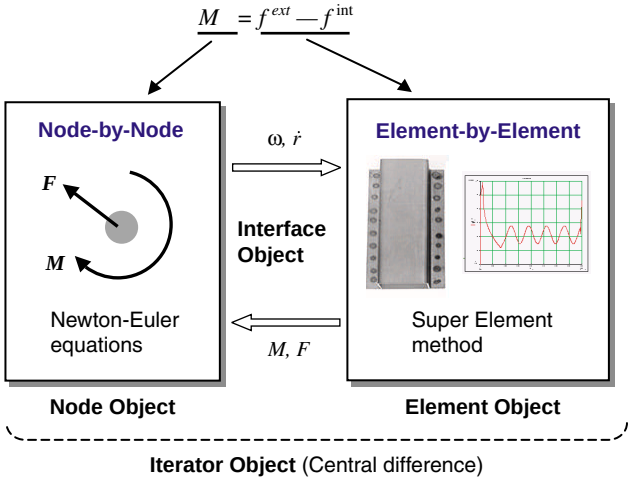


Fig. 2 Relationship between the equation of motion and Node-by-Node/Element-by-Element technique

４．OOP を構成するオブジェクトの説明

非線形問題をプログラミングする場合，OOP[8]（オブジェクト指向プログラミング）は非常に有効な手法となる．本プログラムは Fig. 2 に示す４個のオブジェクトで構成されている．この章では各オブジェクトの処理内容について説明する．

4.1. ノードオブジェクト

節点に力とモーメントが作用している場合，式（3）および式（4）に示す Newton-Euler の運動方程式が得られる[9], [10]．

$$m\ddot{r} = F \qquad (3)$$

$$J\dot{\omega} = M - \omega J\omega \qquad (4)$$

ここに，F と M は節点に発生している力とモーメント，m は節点質量，ω は角速度，J は慣性テンソル，$\ddot{r}$ は全体座標系での加速度である．式（4）の回転運動は節点の局所座標系で表わされる．

新しい節点位置の更新は，まず全体座標系に変換された角速度 ω を求め，次に式（5）に示す回転量の増分 $\Delta\theta$ を計算する．

$$\Delta\theta = \omega\Delta t \qquad (5)$$

この回転量の増分を用いると，新しい節点の位置は式（6）のような単位ベクトルで表現できる．

$$\begin{aligned}\vec{i}_n &= \vec{i}_{n-1} + (a\times\vec{i}_{n-1})\sin(\Delta\theta_n) + 2[a\times(a\times\vec{i}_{n-1})][1-\cos(\Delta\theta_n)]\\ \vec{j}_n &= \vec{j}_{n-1} + (a\times\vec{j}_{n-1})\sin(\Delta\theta_n) + 2[a\times(a\times\vec{j}_{n-1})][1-\cos(\Delta\theta_n)]\\ \vec{k}_n &= \vec{i}_n\times\vec{j}_n\end{aligned} \qquad (6)$$

4.2. エレメントオブジェクト

物体が変形した場合の全ポテンシャルエネルギー J は全ポテンシャルエネルギー停留原理を用いて式(７)のように定義できる[11),12)].

$$\frac{\partial J}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i \equiv 0 \quad (i = 1...N) \tag{7}$$

ここに，$\dot{q}$ は一般化速度，N は総自由度である．梁要素の全ポテンシャルエネルギー J は仮想仕事の原理を用いて式(８)のように表わす．

$$J(q, \dot{q}, \hbar) = Q\dot{q} - P(L_t, \dot{L}_t, \hbar)\Delta L(q, \dot{q}) - M_\alpha(\phi_i, \dot{\phi}_i, \hbar)\phi_\alpha(q, \dot{q}) \tag{8}$$

ここに，Q は外力(一般化力)，P と M_α は部材断面に発生する軸力と曲げモーメント，q は一般化変位，Lt は変形後の部材長さ，ϕ_k は回転量，$\hbar$ は軸力 P と曲げモーメント M_α の状態を表わすパラメータである．

本定式化では式(８)に示した軸力と曲げモーメントに対応する軸剛性，曲げ剛性マトリックスを連続体力学で用いられている Co-Rotational 法を使って誘導した．最終的な要素剛性マトリックスは重ね合わせの原理より算出した．

4.2.1. 軸剛性マトリックス

Fig. 3 に示す変形後の部材長さ Lt は局所座標系を用いて式(９)のように定義する．

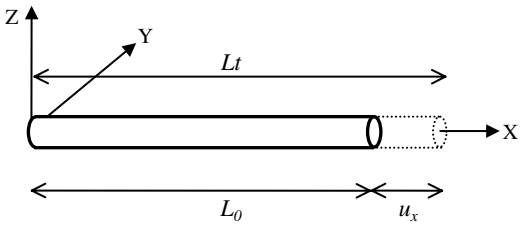


Fig. 3　Three-dimensional rod fixed at one end and subjected to large rotations and deformations

$$L(t) \equiv L_t = \sqrt{(L_0 + u_x)^2 + u_y + u_z} \tag{9}$$

ここに，L_0 は部材初期長さ，u_x，u_y，u_z はそれぞれ局所座標系における部材の変形量である．この変形量 u_x，u_y，u_z に対して式(10)に示す仮想仕事の原理を適用させる．

$$P\frac{\partial \Delta L}{\partial u_x}\delta u_x = 0,\ P\frac{\partial \Delta L}{\partial u_y}\delta u_y = 0,\ P\frac{\partial \Delta L}{\partial u_z}\delta u_z = 0 \tag{10}$$

式(10)の結果から式(11)に示す軸剛性マトリックスが誘導できる[13)]．式(11)内の $P(t)$ はスーパエレメント法で算出される断面の軸圧壊特性である．ただし，梁が弾性状態においては，Euler-Bernoulli の梁理論を用いて要素剛性マトリックスを構築し，梁が塑性状態になると式(11)に切り換える手法を取っている．

$$K_a(t) = \frac{P(t)}{L(t)}\begin{bmatrix} \dfrac{(L+u_x)}{u_x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

4.2.2. 曲げ剛性マトリックス

Co-Rotational 法において，局所座標系は物体の各点で定義され物体の回転と連動する．この回転する局所座標系を用いることにより回転速度テンソル等の剛体回転に関する項を考慮する必要がなくなり，変形速度テンソルのみを扱うことが可能となる．変形速度テンソル $\hat{D}_y$ は式(12)で定義される[4)]．

$$\hat{D}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial \hat{x}_j} + \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial \hat{x}_i}\right) \equiv sym\left(\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial \hat{x}_j}\right) \equiv v_{\hat{i},\hat{j}} \tag{12}$$

ここに，$v_{\hat{i},\hat{j}}$ は局所座標系における速度である．式(12)を用いて式(13)に示す曲げ剛性マトリックスを誘導した．ただし，表示の簡素化のため全体の 1/4 のみ表わす．

$$K_b(t) = \begin{bmatrix} \kappa u_y^2 & \kappa L_o u_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa L_{xz}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa u_y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{M(\phi_y, \alpha_y)\cos(\alpha_y)}{\phi_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{-M(\phi_y, \alpha_y)\sin(\alpha_y)}{\alpha_y} \end{bmatrix} \tag{13}$$

ここに，$M(\phi, \alpha)$ はスーパエレメント法で得られる曲げ崩壊特性，ϕ, α は回転変位量，L_{xz} は変形後の梁の長さ，κ は式(14)で定義される量である．式(13)に対応する変位ベクトル $q(t)$ を式(15)に示す．最終的な要素剛性マトリックスは式(11)と式(13)を重ね合わせの原理により結合させることにより得られ，また，軸力，曲げ，ねじりの連成崩壊を表現することが可能となる．

$$\kappa(t) = \frac{-M}{\sin(\theta)L_t^3 L_{xz}} \tag{14}$$

$$q(t)^T = \{u_x\ u_y\ u_z\ \phi_z\ \alpha_y\} \tag{15}$$

4.3. インタフェースオブジェクト

Fig. 4 に示すような２個の梁要素が結合されているモデルを用いてインタフェースオブジェクトの概要を説明する．通常 FEM では，梁要素A，Bの特性は２個の要素の共通節点 I に離散化され，剛性，変位，速度，内力等は最終的にこの節点 I で表現される．この節点 I に更に剛体運動に関する方程式の代入を試みようとすると，式の組み立てが非常に難しくなってしまう．そこで，本定式化においては，Fig. 5 に示すように節点 I とは別に新しい節点 J を設けた．剛体運動はこの節点 J を使って表現する．更に，姿勢角の計算もこの節点 J を用いて行う．

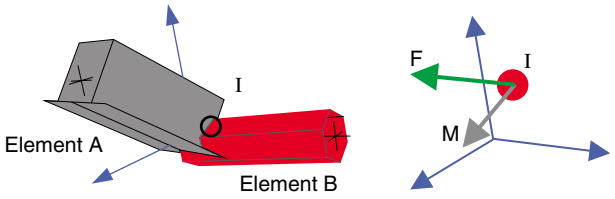


Fig. 4 Illustration of the basic paradigm of the FEM

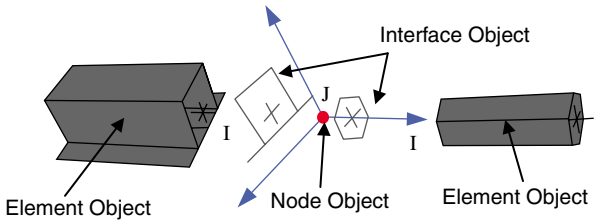


Fig. 5 Concept of the interface objects

中央差分スキームを用いる場合，節点Jにおける荷重F，モーメントMは各時間ステップ間で一定として扱われるため，結果として節点Jは他の節点とは連成しない剛体として扱うことが可能となる．

この一連の処理はノードオブジェクトで実行している．一方，要素の変形は節点Iで表わされているので，インタフェースオブジェクトを用いて2節点I，Jの平衡性を保つようにした．

4.4. イタレータオブジェクト

イタレータオブジェクトは中央差分に基づいた時間積分を実施するルーチンである．Fig. 6 に全体フローを示す．

(1)要素重心の質量，慣性モーメントに初期値を設定する．

(2)節点の速度，角速度に初期値を設定し，更に，質量，慣性モーメントを算出する．

(3)エレメント・バイ・エレメント法に基づいて要素ごとの処理を実施する．節点の速度，角速度から合力F^nと合モーメントM^nを算出し，次のノード・バイ・ノードステップに引き渡す．

(4)ノード・バイ・ノード法に基づいて節点ごとの処理を実施する．ステップ(3)から引き渡されたF^nとM^nを用いて Newton-Euler の運動方程式より節点の並進加速度，角速度を算出し，ステップ(3)に値を戻す．

5．スーパエレメント法の概要

梁の塑性問題，大変形問題，降伏応力のひずみ速度依存性はスーパエレメント法[14]~[18]で計算し，式(11)および式(13)で示した剛性マトリックスに組み込まれる．

スーパエレメント法の定式化は基本的に3ステップで成り立っている．最初のステップではFig. 7に示す薄肉フレームの圧壊試験により，塑性崩壊波長2H，角稜部のローリン

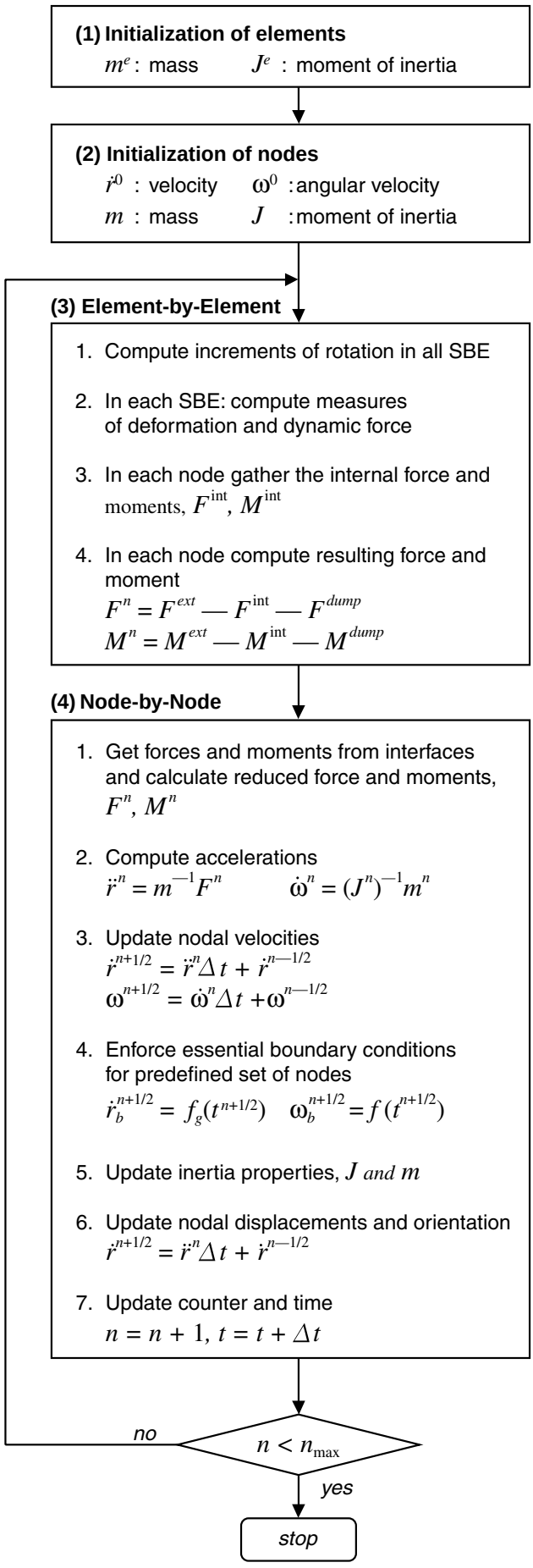
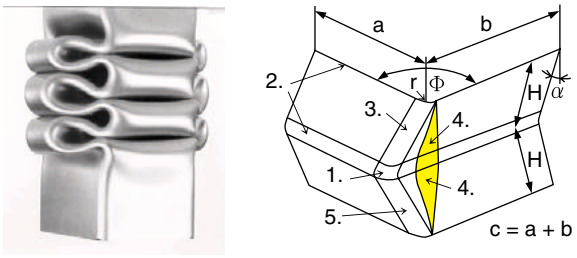


Fig. 6 Flow diagram of numerical procedure



1. Deformation of a 'floating' toroidal surface
2. Bending along stationary hinge lines
3. Rolling deformation
4. Open of conical surface
5. Bending deformation

Fig. 7　Idealized deformation mechanisms

グ半径 r，1 から 5 に示す壁面と稜線の変形モードを仮定する．次のステップでは塑性シェル理論に基づき式(16)に示す内部エネルギーに関する式を仮定する．

$$\dot{E}_{\mathrm{int}} = \int_s N_o \dot{\varepsilon}_1 dS + \sum_{i=1}^{n} \int_{L^i} M_o^i \left[\dot{\theta}_i\right] dl^i \qquad (16)$$

ここに，L^i は i 番目のヒンジラインの長さ，n は総塑性ヒンジライン数，N_o，$M^i{}_o$はそれぞれ軸応力，曲げ応力である．式(16)の第１項，第２項は式(17)および式(18)を用いて計算できる．

$$E_{\mathrm{int}}^{N} = \sigma_0^N(\bar{\varepsilon}) \int_0^{\alpha} d\alpha \int_s t\dot{\varepsilon} dS \qquad (17)$$

$$E_{\mathrm{int}}^{M} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_0^M(\bar{\varepsilon}) \frac{t}{4} \int_0^{\alpha} d\alpha \int_{L^i} \left[\dot{\theta} i\right] dl^i \qquad (18)$$

ここに，σ_0^N，σ_0^Mは流れ応力[19]，α は変形プロセスを示す変数，tは板厚である．式(16)と式(17)および式(18)を用いて式(19)に示す平均荷重 Pm を定義する．

$$P_m = \frac{t^2}{4}\{\sigma_0^N(\bar{\varepsilon}_1)A_1\frac{r}{t} + \sigma_0^M(\bar{\varepsilon}_2)A_2\frac{C}{H} + \sigma_0^M(\bar{\varepsilon}_3)A_3\frac{H}{r} + \\ + \sigma_0^M(\bar{\varepsilon}_4)A_4\frac{H}{t} + \sigma_0^N(\bar{\varepsilon}_5)A_5\}\frac{2H}{\delta_{eff}} \qquad (19)$$

ここに，δ_{eff}は有効潰れ長さ，Aは断面形状に関する係数である．最後のステップでポテンシャルエネルギー停留原理から式(20)に示すフレームの平均荷重 Pm が得られる．

$$P_m(H) = \frac{2H}{\delta_{eff}}\left(2\pi M_0 \frac{H}{t} + \frac{4\pi c M_0}{H}\right) \qquad (20)$$

ここに，M_0は全塑性モーメントである．この平均荷重Pmから Fig. 8 に示す断面の軸圧壊特性，曲げ崩壊特性が算出できる．

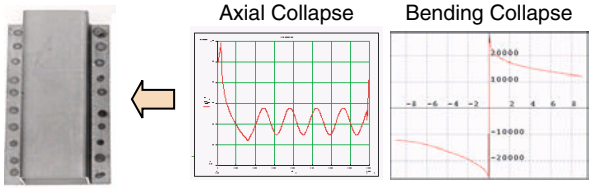


Fig. 8　Schematic illustration of the Super Element characteristics

5.1. 崩壊判定

Pre-Collapse 領域における梁要素の崩壊判定は式(21)を用いて行う．

$$\left(\frac{P}{P\max}\right)^a + \left(\frac{My}{My\max}\right)^a + \left(\frac{Mz}{Mz\max}\right)^a + \left(\frac{T}{T\max}\right)^a = 1 \qquad (21)$$

ここに，P ***max***，My ***max***，Mx ***max***，T ***max*** はそれぞれ梁の最大軸圧壊荷重，Y軸，Z軸回りの最大曲げ崩壊モーメント，最大ねじり崩壊モーメントである．一方，P，My，Mz，T は梁要素に発生している荷重である．係数 a は板厚幅比で決定される変数である．梁要素は式(21)の左辺の値が１に達すると崩壊が生じるものと仮定する．

Post-Collapse 領域においては，梁要素の変形によって P ***max***，My ***max***，Mx ***max***，T ***max***が減少するため，式(21)を使うことができない．そこで，式(22)を仮定し崩壊判定を行った．Fig. 9 に崩壊面と崩壊荷重の関係を示す．

$$\left|\frac{P}{P\max(u)}\right| + \left|\frac{My}{My\max(\phi)}\right| + \left|\frac{Mz}{Mz\max(\phi)}\right| + \left|\frac{T}{T\max(\phi)}\right| = 1 \qquad (22)$$

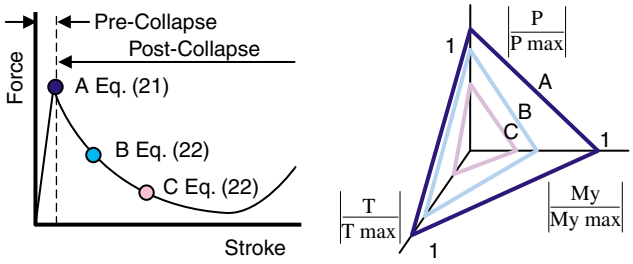


Fig. 9　Relationship between the interaction surface and the crushing characteristic

5.2. 解析システム

Fig. 10 に本梁モデルの解析システムを示す．

(1)断面設計ソフト Crash Cad[18]を用いてフレーム断面の軸圧壊，曲げ崩壊特性を計算し，データを保存する．

(2)プリプロセッサを用い３次元モデルを作成する．要素特性は保存した Crash Cad のデータを指定する．

(3)境界条件の設定後，ソルバを実行する．

(4)ポストプロセッサを用いて梁の崩壊挙動を検討する．

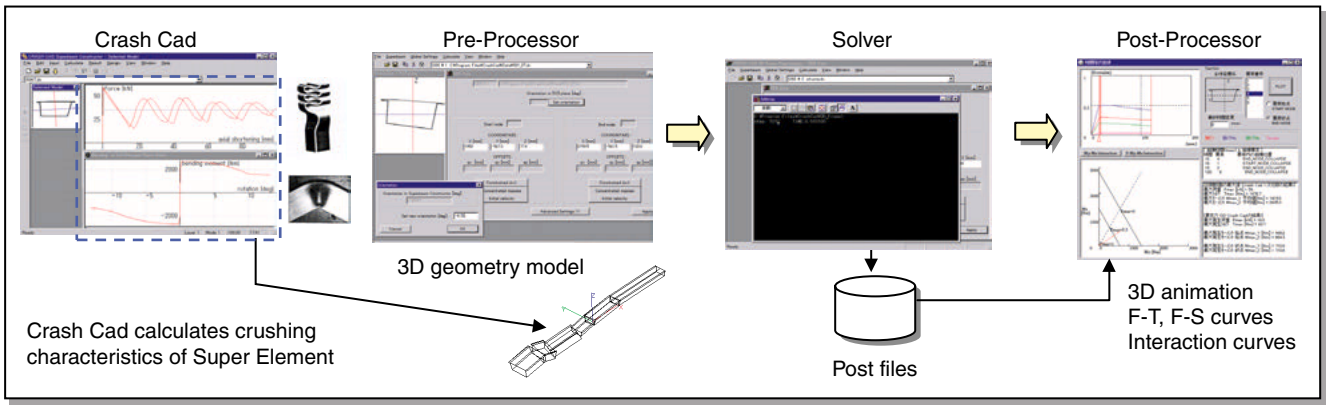


Fig. 10 Organization of the design/calculation environment for 3D large deformations beam systems

6．適用事例

6.1. アルミ押出しフレームの準静的問題[20]

Fig. 11に示す試験片の両端を回転支持したアルミ押出し成形材に準静的荷重を与えた場合の曲げ崩壊解析を実施した．断面はType A，Type Bの２種類用意し，板厚は両Typeとも２ mm である．材質は 6000 系－ T5，耐力＝ 186Mpa，E=69Mpa，ν＝ 0.33 である．

試験および解析結果の荷重－変位線図を Fig. 12 に示す．本梁要素の結果は最大荷重および Post-Collapse 領域とも高い相関性を得ていることが分かる．

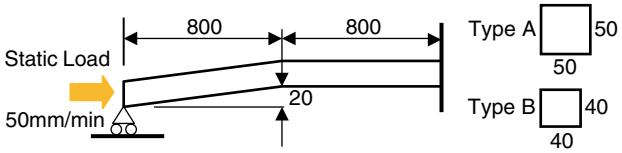


Fig. 11 Dimensions of the crooked extruded aluminum beam

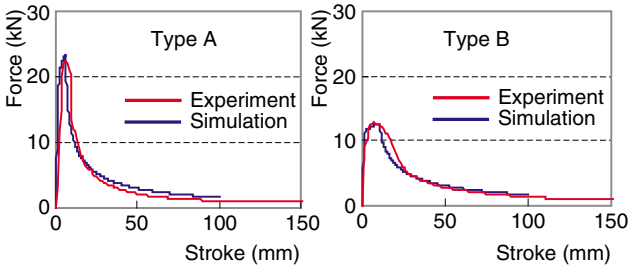


Fig. 12 Correlation of experimental and simulation results for the crooked aluminium beam shown in Fig. 11

6.2. 薄肉曲がり部材の準静的問題[21]，[22]

試験辺の両端を完全固定した薄肉曲り部材に準静的荷重を与えた解析を行った．薄肉曲がり部材の形状及び断面を Fig. 13に示す．部材はハット材と平板をフランジを介してスポット溶接し，部材の両端には部材を試験装置に固定させるための端板を全周アーク溶接にて取付けた．曲がり角度 θは15 °，30 ° の２種類を用意し，部材の板厚は1.2mm，材質は SPC である．

Fig. 14 に曲がり角度 15 ° 部材における 100mm ストローク時点での変形モードを示す．本梁要素の結果は崩壊位置および変形角度とも高い相関性を得ていることが分かる．

Fig. 15 に曲がり角度 15 ° と 30 ° 部材の荷重－変位線図を示す．この問題においても最大荷重，Post-Collapse 領域とも良好な精度が得られた．

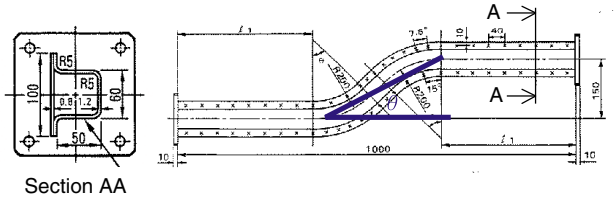


Fig. 13 Dimensions of the thin-walled steel S-frame

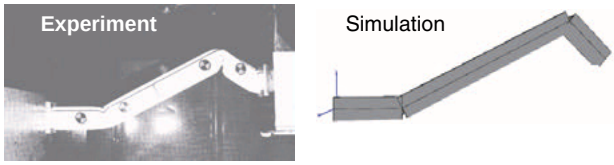


Fig. 14 Comparison of deformed modes at 100 mm stroke

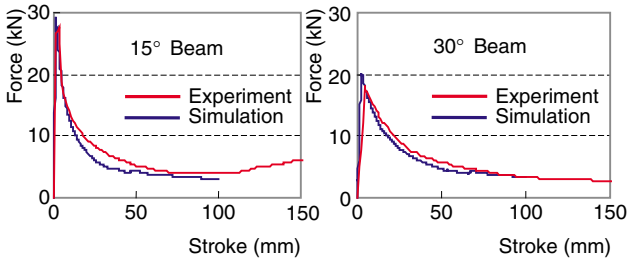


Fig. 15 Correlation of experimental and simulation results for the thin-walled S-frame shown in Fig. 13

6.3. リアフレームの準静的崩壊問題

実際の車体構造で使用されているリアフレームを用い準静的問題を解析する．この問題においては FE モデルとの比較を行う．Fig. 16 に FE モデルと梁モデルを示す．FE モデルはすべてシェル要素で構成されており，一方，本梁モデルは６個の要素で構成されている．

Fig. 17 に FEM と本梁モデルのストロークが 50mm 時点の変形モードを示す．両者の崩壊位置および変形モードとも良好に一致していることが分かる．崩壊時の最大荷重に関しては，FEM は 19.5kN，本梁モデルが 18.4kN となり，両者は非常に近い値であった

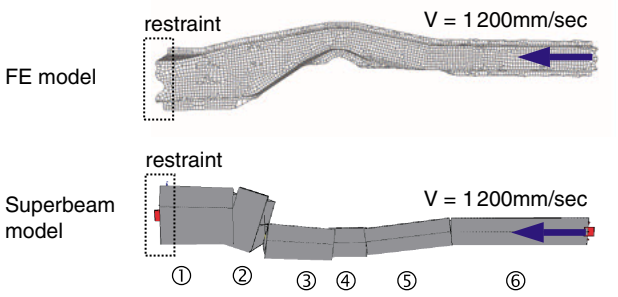


Fig. 16 Boundary and loading conditins for FEM and Superbeam models

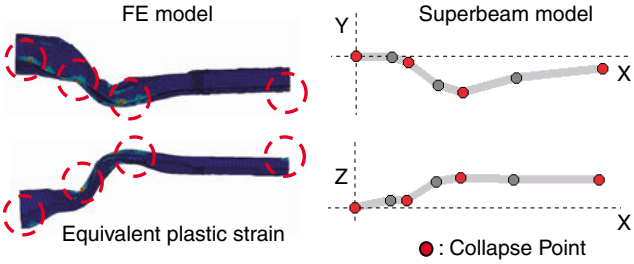


Fig. 17 Deformed configurations of FEM and Superbeam

6.4. BOX フレームの動的ねじり問題

Fig. 18 に示す折角度 90 ° の４角形断面フレームの先端に動的荷重を作用させた解析を行った．この解析の目的はねじり変形が支配的な崩壊問題において本定式化の精度を検証するものである．

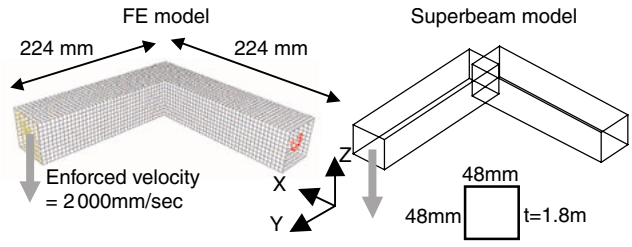


Fig. 18 Boundary and loading conditions for FEM and Superbeam model of thin-walled torque box

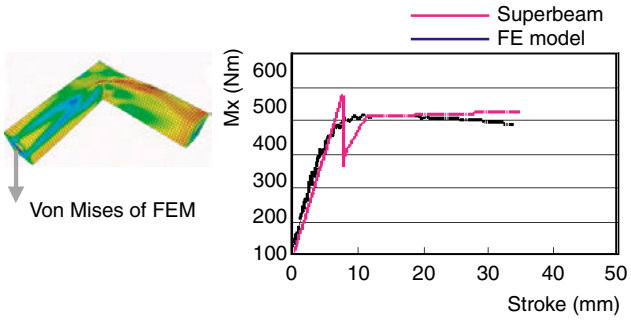


Fig. 19 Correlation of FEM and Superbeam results for the thin-walled torque box shown in Fig. 18

Fig. 19 に荷重－変位線図を示す．FEM とほぼ良好な相関を得ている．梁モデルはストロークが約８ mm の時点で振動を起こしているが，これは２要素でモデル化していることが原因であり，モデルを細かく分割すれば解決される．

6.5. 薄肉曲がり部材の動的問題[23]

6.2.節で用いた薄肉曲がり部材の動的問題を解析した．動的試験装置の概略を Fig. 20 に示す．45 ° 部材を台車前端に固定し，バリアに速度 30km/h で衝突させる．

Fig. 21 に荷重－変位線図を示す．試験において，初期の最大荷重は試験材先端に取付けた端板重量[23]やロードセルのサンプリングピッチ等の影響が含まれており，梁モデルの最大荷重と異なっているが，Post-Collapse 領域においてはほぼ良好な相関が得られている．

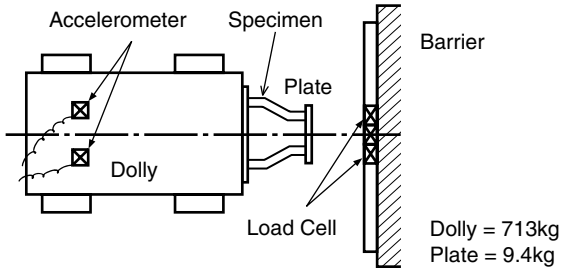


Fig. 20 Schematic diagram of dynamic experiment

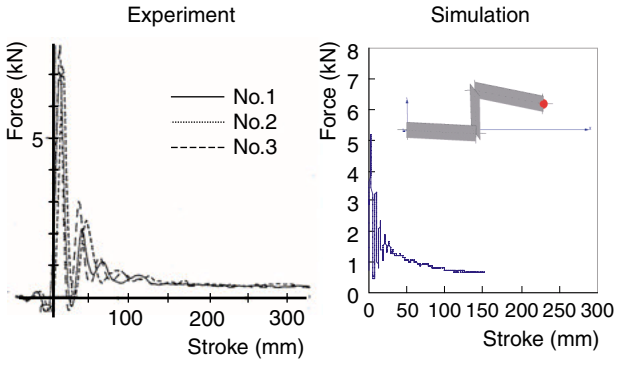


Fig. 21 Results of experiments and Superbeam model simulation for S-frame shown in Fig. 20

6.6. CPU 時間の比較

6.3. 節のリアフレームを用いて計算時間の比較を行う．FE モデルは約 5 000 のシェル要素で構成されており，スーパコンピュータで計算した場合，変形量 200mm までに約 22 時間の CPU 時間が必要であった．

一方，本梁モデルは PC 上で稼動し変形量 200mm までの計算時間は 68 秒であった．

７．まとめ

本研究では梁要素を用いて動的崩壊問題を解析するために，FEM，スーパエレメント法，剛体力学を組合わせた新しい定式化を行った．以下に本定式化の成果をまとめる．

（1）本梁要素の結果は実験と良好に一致していることが確認された．同時にスーパエレメント法の有効性も立証出来た．

（2）レイアウト段階において，断面データから崩壊特性が予測可能な初期検討ツールを開発出来た．

（3）本定式化を用いることにより短時間で計算可能な非線形シェル要素の開発も可能であることが判明した．

参考文献

（1）高田賢治，松浦範和， 中野文雄，岩本淳:自動車車体解析用プリプロセッサの開発，計算工学講演会論文集，Vol.7, p.263-266 (2002)

（2）川井忠彦，野上邦栄：剛構造部材と骨組の離散化極限解析，東京，培風館，1991, p.93-119

（3）Abramowicz, W. : Object Oriented, Reduced Operation Set Formulation of the Multi-Body Macro and Finite Element method, Impact Design Europe Report 2/2001, 2001, 238p.

（4）Belytschko, T., Liu, W, K. and Moran, B. : Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures, New York, John Wiley, 2000, 650p.

（5）Belytshko, T. and Hughes, TJR. : Computational Methods for Transient Analysis, Amsterdam, North-Holland, 1983, 523p.

（6）Cook, RD. , Malkus, DS. and Plesha, ME. : Concepts and Applications of Finite Element Analysis, New York, John Wiley, 1989, 630p

（7）Zienkiewicz, OE. and Taylor, RL. : The Finite Element Method (Vol1. The Basis Oxford, Butterworth-Heinemann, 2000, 689p.

（8）MSDN (the Microsoft Developer Network), ©1991-2000 Microsoft Corporation, http://msdn.microsoft.com/.

（9）Rosenberg, M, R. : Analytical Dynamics of Discrete Systems, New York, Plenum Press, 1977, 424p.

(10) Blajer, W. : Methods of Multibody Dynamics, Monographs of Radom Technical University (in polish), 1998, 184p.

(11) 川井忠彦:離散化極限解析法概論，コンピュータによる極限解析法シリーズ１，東京，培風館，1991, p.23-52

(12) 鷲津久一朗，宮本博，山田嘉昭，山本善之，川井忠彦:有限要素法ハンドブックⅠ基礎編，東京，培風館，443p.

(13) Abramowicz, W. : Limitations of the matrix method in the FEM formulation for large deformations and strains, Impact Design Europe Report 1/2001, 2001, 327p.

(14) Abramowicz,W.: Macro element method on crashworthiness of Vehicles in Crashworthiness energy management and occupant protection (Ambrosio J.Editor), Wien NewYork, Springer-Verlag, 2001, p85-138.

(15) Abramowicz, W. : Extremal Paths in Progressive Plasticity, Int. J. Impact Engng, Vol. 18, No. 7-8, p753-764, (1996).

(16) Abramowicz, W. and Wierzbicki, T. : Axial crushing of multi-corner sheet metal columns, J. App. Mech., Vol. 56, No. 1, p113-120, (1989).

(17) Wierzbicki,T.and Abramowicz, W. : The Manual of Crashworth Crashworthiness Engineering Vol. I-IV, Center for Transportation Studies, Massachusetts Institute of Technology, 1987-1989, 542p.

(18) Abramowicz, W. and Wierzbicki, T. : Crash Cad Manuals -Superbeam Constructor, Boston MA, Impact Design, 1998, 73p.

(19) 平修二：現代塑性力学，東京，オーム社，1982, p13

(20) 江川泰久，佐藤俊彦：衝突における主フレーム曲げ壁面崩壊の影響，自動車技術，Vol.52, No.4, p.49-54 (1998)

(21) 自動車技術会･構造強度部門委員会:薄肉曲がり部材の崩壊特性 Vol.1 試験方法と結果，p.1-222 (1986)

(22) Ohkami, Y., et al : Collapse of Thin Walled Curved Beam with Closed Hat Section - Part 1, Study on Collapse Characterristic, SAE, 900560, (1990)

(23) 自動車技術会･構造強度部門委員会:薄肉曲がり部材の崩壊特性，Vol. II試験結果の考察とシミュレーション，p.106-125 (1989)

■著　者■

高 田 賢 治

Wlodek Abramowicz