

自動車構造の大変形解析用シェル要素の開発

A New Shell Element for Large Displacement Analysis of Automotive Structure

高 田 賢 治*	岡 崎 悟*	池 田 慎 一*
Kenji Takada	Satoru Okazaki	Shinichi Ikeda
中 野 文 雄*	大 村 成*	
Fumio Nakano	Shigeru Ohmura	

要 旨

自動車構造の大変形解析のため、新しいシェル要素を開発した。その新しいシェル要素は有限要素法において幅広く用いられている Belytschko-Tsay 要素に基づいている。

Belytschko-Tsay 要素は平均求積要素の中でも、精度と効率が良いことで知られている。但し、この要素は捩り剛性を持っていないため、捩り変形を受けた場合、著しい精度悪化を示す。

新しいシェル要素は捩り変形状態において、捩り形状の考慮と物理的剛性を組み込むことにより、精度を改善している。

ABSTRACT

A new shell element was developed for large displacement analysis of automotive structure. The new shell element is based on the Belytschko-Tsay shell, which has gained wide acceptance in finite element method. Although the Belytschko-Tsay shell is well known for its accuracy and efficiency among mean quadrature elements, the element exhibits severe performance deficiencies when subjected to warping distortions.

The new shell provides improved accuracy by correcting warping distortions. This is achieved by considering warped geometry and introducing physical stiffness.

1. ま え が き

Mindlin のシェル理論に基づいた C^0 要素は、有限要素法において、精度、効率とも十分な効果を上げている。 C^0 Mindlin 理論は厚肉シェルと同様に、薄肉シェルにも適用可能である。 C^0 Mindlin 理論を用いたシェル要素の中で、最もよく使われるものを以下に示す。

- ① MSC/NASTRAN の QUAD4 要素
- ② Dvorkin-Bathe 要素
- ③ 四節点 Hughes-Liu 要素
- ④ Belytschko-Tsay 要素

QUAD4 要素と Dvorkin-Bathe 要素は縦せん断に関して、選択次数低減積分と仮定した歪分布を用い、歪に関して、完全な形での積分を実施している。そのため、これらの要素は CPU 時間が多くなることから、陰解法に適している (APPENDIX A 参照)。

一方、Belytschko-Tsay 要素と Hughes-Liu 要素は、均一次数低減積分を用いている (平均求積法または一点 Gauss 積分)。

これらの要素は相対的に CPU 時間が短いため、陽解法に適している。しかしながら、後者の二種類の要素は剛性マトリックスに関し、ランク不足 (APPENDIX B 参照) である。このランク不足を解消するために、何らかの形での数値安定化が必要となる。

Belytschko-Tsay 要素は Hughes-Liu 要素に比べ、計算時間が半分以下であるため、有限要素法に多く用いられている。しかしながら、Hughes-Liu 要素は定式化に際し、捩り形状 (warped geometry) を含んでいるのに対し、Belytschko-Tsay 要素は、平面形状 (flat geometry) を仮定しているだけである。

Belytschko-Tsay 要素と Hughes-Liu 要素は、低次の

* 栃木研究所

積分を実施しているために、アワグラスコントロールが必要になる (APPENDIX C 参照)。しかしながら、アワグラスコントロールによる安定化を施しても、その追加されたアワグラス剛性は、もともとの面内及び曲げ剛性に対し、小さな値でなければならないため、安定化に関しては相対的に影響が少ない。そのため、要素の側面に外力が作用する問題においては、著しい変形を生じる可能性があり、特に振り変形時に著しいと推測される。

本論文の新要素は、陽解法で用いられる多くのシェル理論の中で、最も効率の優れている Belytschko-Tsay 要素の定式化を基本として用い、二つの重要な問題点を解決した。一つ目は振り形状 (warped geometry) の考慮であり、二つ目は振り変形における剛性マトリックスの不完全性を解消するために、振りに対する物理的剛性を導入したことである。

2. 基本の定式化と改良項目

新要素の定式化は、Belytschko-Tsay 要素に基づいている。Belytschko-Tsay 要素の定式化について、この章で説明する。最初に仮想仕事の原理から説明する。

$$\int_V \rho \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{V}_i dV + \int_V \mathbf{t}^{ij} V_{ij} dV = \int_A \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{V}_i dA + \int_V \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{V}_i dV \quad (1)$$

ここに、 ρ は密度、 $\mathbf{a}_i$ は加速度、 $\mathbf{p}_i$ は表面力、 $\mathbf{q}_i$ は体積力、 $\mathbf{v}_i$ は速度である。歪エネルギーは速度勾配 V_{ij} を用いて、Cauchy 応力 $\mathbf{t}_{ij}$ の内積から求めている。歪勾配の対称部分は歪速度になる。

$$\mathbf{d}_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{V}_{ij} + \mathbf{V}_{ji}) \quad (2)$$

それは、Cauchy 応力に相当するエネルギーである。Mindlin のシェル理論での運動力学上の仮定と仮想仕事の表現に注意を払うと、歪エネルギーの項は以下のようになる。

$$\int_V \mathbf{t}^{ij} V_{ij} dV = \mathbf{V}_{i1} \cdot \boldsymbol{\tau}^{i1} \mathbf{B}_1^I + \theta_{i1} (\boldsymbol{\tau}^{i3} \mathbf{A}_3^I + \boldsymbol{\mu}^{ij} \mathbf{B}_j^I) \quad (3)$$

ここに、 $\mathbf{V}_{i1}$ と $\theta_{i1} = \{-\omega_{21}, \omega_{11}, 0\}$ 、($i = 1, 2, 3$) は任意の節点 i における並進速度、回転速度である。応力 $\mathbf{t}_{ij}$ は板厚 h で積分することで得られる。

$$\boldsymbol{\tau}^{ij} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathbf{t}^{ij} d\xi^3 \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\mu}^{ij} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathbf{t}^{ij} h \xi^3 d\xi^3 \quad (5)$$

一方、微分作用素は

$$\mathbf{B}_1^I = -h \mathbf{X}_J^2 (\mathbf{V}^{J1} - \mathbf{V}^{1J}) \quad (6)$$

$$\mathbf{B}_2^I = h \mathbf{X}_J^1 (\mathbf{V}^{J1} - \mathbf{V}^{1J}) \quad (7)$$

$$\mathbf{A}_3^I = h (\mathbf{X}_J^1 \mathbf{X}_K^2 - \mathbf{X}_J^2 \mathbf{X}_K^1) \mathbf{W}^{1JK} \quad (8)$$

ここに、

$$\mathbf{V}^{IJ} = \iint \mathbf{N}_i^I \mathbf{N}_j^J d\xi^2 d\xi^1 \quad (9)$$

$$\mathbf{W}^{1JK} = \iint \mathbf{N}_i^I \mathbf{N}_j^J \mathbf{N}_k^K d\xi^2 d\xi^1 \quad (10)$$

指数 i, j, k は節点を示す。 $\mathbf{N}_i$ は節点 i における形状関数、 ξ_i はアイソパラメトリック座標、 $\mathbf{X}_{ij}$ は節点 j の座標値を示している。これから、歪速度は

$$\mathbf{d}_{11} = \frac{1}{V} [\mathbf{B}_1^I \mathbf{V}_{11} + h \xi^3 \mathbf{B}_1^I \theta_{11}] \quad (11)$$

$$\mathbf{d}_{22} = \frac{1}{V} [\mathbf{B}_2^I \mathbf{V}_{21} + h \xi^3 \mathbf{B}_2^I \theta_{21}] \quad (12)$$

$$2\mathbf{d}_{12} = \frac{1}{V} [\mathbf{B}_1^I \mathbf{V}_{21} + \mathbf{B}_2^I \mathbf{V}_{11} + h \xi^3 (\mathbf{B}_1^I \theta_{21} + \mathbf{B}_2^I \theta_{11})] \quad (13)$$

$$2\mathbf{d}_{31} = \frac{1}{V} [\mathbf{B}_1^I \mathbf{V}_{31} + \mathbf{A}_3^I \theta_{11}] \quad (14)$$

$$2\mathbf{d}_{32} = \frac{1}{V} [\mathbf{B}_2^I \mathbf{V}_{31} + \mathbf{A}_3^I \theta_{21}] \quad (15)$$

更に、荷重とモーメントは

$$\mathbf{f}_1^I = \boldsymbol{\tau}^{11} \mathbf{B}_1^I + \boldsymbol{\tau}^{12} \mathbf{B}_2^I \quad (16)$$

$$\mathbf{f}_2^I = \boldsymbol{\tau}^{22} \mathbf{B}_2^I + \boldsymbol{\tau}^{12} \mathbf{B}_1^I \quad (17)$$

$$\mathbf{f}_3^I = \boldsymbol{\tau}^{31} \mathbf{B}_1^I + \boldsymbol{\tau}^{23} \mathbf{B}_2^I \quad (18)$$

$$\mathbf{m}_1^I = -\boldsymbol{\mu}^{22} \mathbf{B}_2^I - \boldsymbol{\mu}^{12} \mathbf{B}_1^I - \boldsymbol{\tau}^{23} \mathbf{A}_3^I \quad (19)$$

$$\mathbf{m}_2^I = +\boldsymbol{\mu}^{11} \mathbf{B}_1^I + \boldsymbol{\mu}^{12} + \boldsymbol{\tau}^{31} \mathbf{A}_3^I \quad (20)$$

面積 v_{ij} と w_{ijk} の積分は正確に計算される。板厚に関係する応力 τ_{ij} と μ_{ij} は数値積分にて求める。

新要素は Belytschko-Tsay 要素が用いている定式化を基本とし、以下に記す二つの重要な改良点を追加した。

① Belytschko-Tsay 要素の定式は平面形状を仮定している。つまり、面内と曲げ変形に関する連成項は考慮していない。

新要素は連成項を考慮したため、振れ形状を表現することが可能になった。この機能をオプション 1 と名づけた。

② Belytschko-Tsay 要素の定式化における平均求積法は、ランクが不足している。そのランク不足は非物理的な五個のアワグラスモードを生じさせる。二個の面内モード (in-plane membrane modes) と、二個のひねりモード (twisting modes) と、一個の振れモード (warping mode) の五個のモードである。

Belytschko-Tsay 要素においては、ランク不足をアワグラス剛性を用いることにより、安定化させている。新要素はアワグラスコントロールの代わりに、物理的な剛性を用いて、振れモードを表現している。残りのアワグラスモードについては、Belytschko-Tsay 要素と同様な手法にて、安定化させている。二種類の物理的な剛性が新要素に組み込まれ、それらをオプション 2、オプション 3 と名づけ

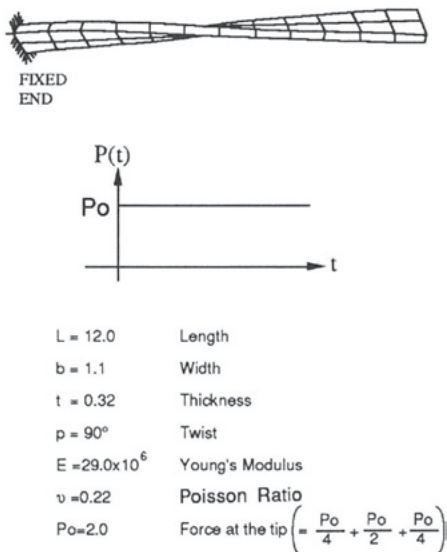


Fig. 1 Twisted Beam

た。また、これらはオプション 1 と同様な振れ形状を考慮している。

3. 解析例

以下に示す解析例では、新要素の性能を陽解法で用いられる他の要素と比較しながら説明を行う。

最初の二つの解析例は、MacNeal と Harder[1985]により、提案されたテスト問題の中から抜粋した。最後の解析例は、実施したテストと比較したものである。

3.1. Twisted Beam 問題

Fig. 1 に示す Twisted Beam 問題は、シェル要素の振れ形状の影響を調査するものである。ビームは、その先端に面内せん断力が作用されている。

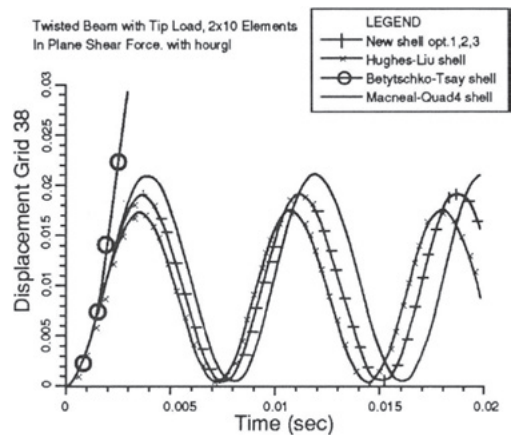


Fig. 2 Tip Displacement for in-Plane Shear, Twisted Beam

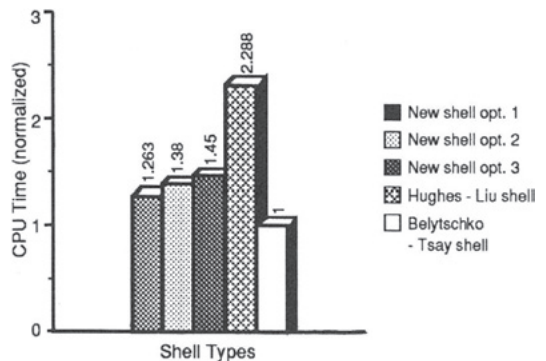


Fig. 3 CPU Time for Shell Formulations, in-Plane Shear, Twisted Beam

この解析結果を Fig. 2 に示す。Belytschko-Tsay 要素は振れ形状を考慮してないため、発散している。Hughes-Liu 要素と新要素の三個のオプションは、定式化において振れ形状を考慮しているため、結果は QUAD4 に近いものになっている。更に、新要素のすべてのオプションがこの例題において、完全に一致している。つまり、この例題では振れ形状のみが重要であるということを意味し、新要素のオプション 1 でも十分な精度を得る。

Fig. 3 に、参考として、CPU 時間の比較を示す。オプション 3 は、Belytschko-Tsay 要素より約 50% 多くなっている。オプション 3 は三種類のオプションのなかで、最も複雑な処理を行っているのにもかかわらず、Hughes-Liu 要素より、計算時間は少なく、精度も良くなっている。

3.2. HEMISPHERE 問題

この解析例は、半球体の円周に 90° ピッチで集中荷重が作用する場合を扱う。モデルは $1/4$ だけを用い、対称条件を考慮する。Fig. 4 に示す問題では、振れ変形が生じた時の要素の精度を調査する。

この解析例の結果を Fig. 5 に示す。新要素のオプション 1、Hughes-Liu 要素、Belytschko-Tsay 要素は、この例題ではすべて精度が悪く、Z 方向の変位が増加しながら振動を起こしている。いっぽう、オプション 2、オプション 3 の変位は、安定した振動を起こしている。更に、オプション 3 は QUAD4 の結果と、ほとんど一致し

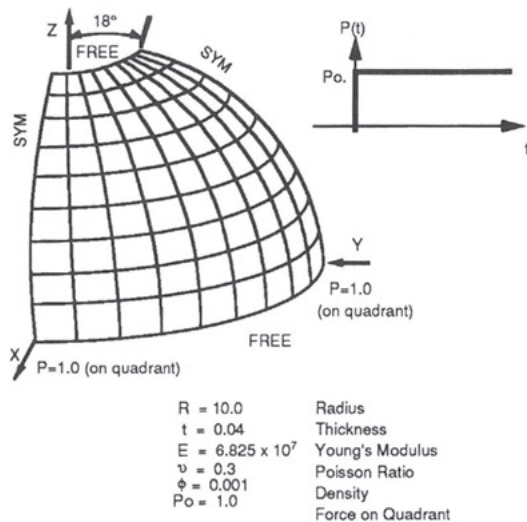


Fig. 4 Hemisphere

ている。

QUAD4 が四点 GAUSS 積分を用いているのに対し、オプション 3 は平均求積法を用いている。それにもかかわらず、結果がほぼ一致するということは、オプション 3 の定式化が高い精度を持っていると言える。

Fig. 6 では、各要素のアワグラスエネルギーについて考察した結果を示す。オプション 2、3 は他の要素と比べ、非常に少ないアワグラスエネルギー量になっている。これは、他の要素が振れ変形において、アワグラスコントロールを使用しているのに対し、新要素は物理的剛性を用いているからである。

3.3. 平板の準静的振り問題

この解析例は、平板に準静的振り荷重が作用する時の挙動を調査するものである。平板の長さは 510mm、幅は

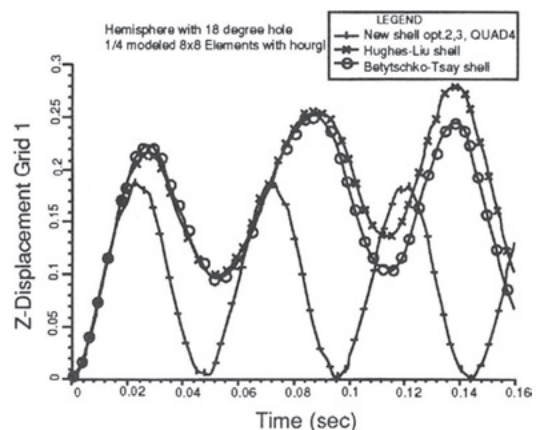


Fig. 5 Displacement at Load Point, Hemisphere

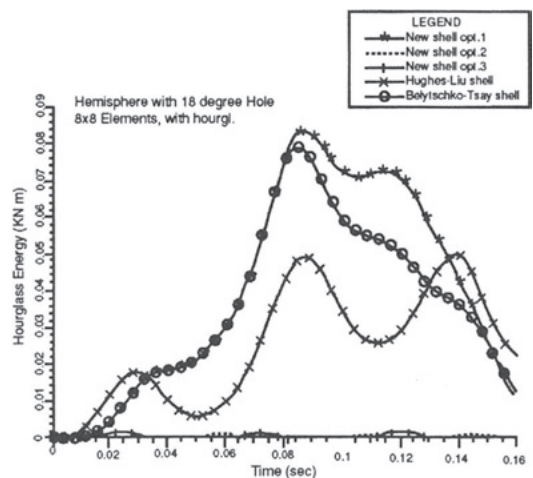


Fig. 6 Hourglass Energy, Hemisphere

150mm、板厚は1.6mmである。この例題は、前述の例題と同様に、捩れ変形が生じた時の要素の性能を調べるものである。

計算モデルを Fig. 7 に示す。メッシュ寸法は5mmに統一し、トルクは平板の端部に強制速度を作用することで表現した。

結果を Fig. 8 と Fig. 9 に示す。新要素、Belytschko-Tsay 要素とも約 15° までの回転では、テスト結果とはほぼ一致している。更に、回転角を増加させると、約 240 を過ぎたところで、Belytschko-Tsay 要素はトルクが減少するのに対し、新要素は増加を続ける。

このトルクの減少は、要素が不安定ということを示しており、Belytschko-Tsay 要素のアウグラスによる安定化が捩り変形に対しては、働いていないということである。いっぽう、新要素は捩り変形に物理的剛性を考慮しているため、大きく回転した状態でも安定性を保っている。

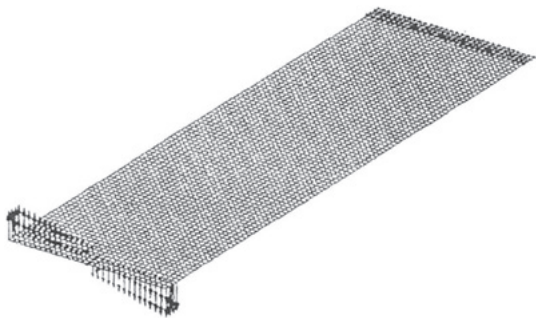


Fig. 7 Finite Element Model for Quasi-Static Torsion of Flat Plate

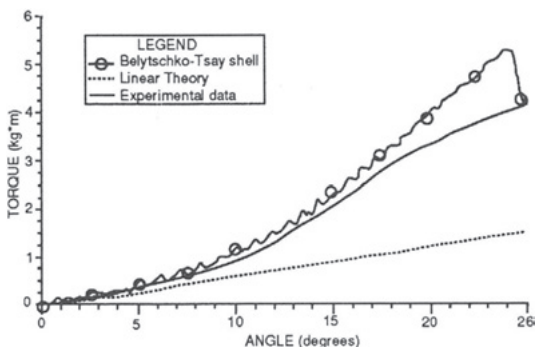


Fig. 8 Results for Quasi-Static Torsion of Flat Plate (Belytschko-Tsay Shell)

4. まとめ

本論文では、新シェル要素の性能について述べてきた。新シェル要素は Belytschko-Tsay 要素の定式化を基礎にし、二つの重要な改良を施した。捩れ形状の考慮と、捩れ変形に対する物理的剛性の考慮である。

三種類の解析例で、この新シェル要素の性能を示した。更に、

それら解析例の結果から、構造解析において捩れ形状と、捩り変形が重要であることも判明した。

5. 謝 辞

本研究を進めるにあたって、新シェル要素の開発を担当した米 MSC 社の Hoff 氏、Mendoza 氏及び、KEY Associates の Key 博士、更に、有益な助言を頂いた日本 MSC 社のスタッフに対し感謝の意を表します。

参考文献

- (1) T. Belytschko, J. I. Lin and C. S. Tsay
“Explicit Algorithms for the Nonlinear Dynamics of Shells,”
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 42, (1984), pp.251-255
- (2) E. N. Dvorkin and K. -J. Bathe,
“A Continuum Mechanics Based Four-Node Shell Element for General Nonlinear Analysis,”
Engineering Computations,

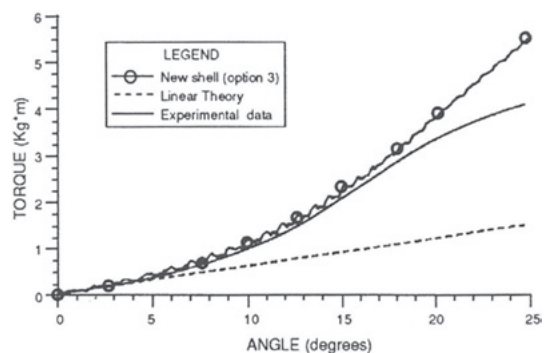


Fig. 9 Results for Quasi-Static Torsion of Flat Plate (New Shell, Option 3)

Vol. 1, (1984), pp. 77-88.

- (3) T. J. R. Hughes and W. K. Liu,
"Nonlinear Finite Element Analysis of Shells:
Part I. Three-Dimensional Shells,"
Computer Methods in Applied Mechanics and
Engineering, Vol. 26, (1981), pp.331-362.
- (4) T. J. R. Hughes and W. K. Liu,
"Nonlinear Finite Element Analysis of Shells:
Part II. Two-Dimensional Shells,"
Computer Methods in Applied Mechanics and
Engineering, Vol. 27, (1981), pp.167-181.
- (5) R. H. MacNeal,
"A Simple Quadrilateral Shell Element,"
Computers and Structures, Vol. 8, (1978),
pp.175-183.
- (6) R. H. MacNeal and R. L. Harder,
"A Proposed Standard Set of Problems to
Test Finite Element Accuracy,"
Journal of Finite Elements in Analysis and
Design, Vol. 1 (1985), pp.3-20.
- (7) MSC/DYNA User's Manual,
MSC/DYNA Version 2, (1991),
The MacNeal-Schwendler Corporation, Los
Angeles, California
- (8) MSC/NASTRAN User's Manual,
MSC/NASTRAN Version 67 (1991),
The MacNeal-Schwendler Corporation, Los
Angeles, California

APPENDIX

(A) 陽解法と陰解法

有限要素法では、運動方程式を次の様に表現する。

$$[M] \{a\} + [C] \{v\} + [K] \{d\} = \{F\} \quad (1)$$

ここで、 $[M]$: 質量マトリックス

$[C]$: 減衰マトリックス

$[K]$: 剛性マトリックス

$\{F\}$: 接点荷重ベクトル

$\{a\}$: 加速度ベクトル

$\{v\}$: 速度ベクトル

$\{d\}$: 変位ベクトル

一般に、(1)式を解く場合は、各マトリックスを逆転させる演算が必要となるが、マトリックスを対角化またはベクトル化すると、計算は容易になる。

つまり、マトリックスの逆転等の複雑な演算を含まない解法のことを陽解法、それ以外を陰解法と呼ぶ。

衝突プログラムでは、(1)式を更に簡略化する。

$$[M] \{a\} + \{P\} = \{F\} \quad (2)$$

ここで、 $\{P\}$: 内力ベクトル、(1)式の $[K] \{d\}$ に相当。

時間積分法に陽解法(陽的中央差分法)を用いれば、時刻 t^{n+1} の加速度、速度、変化は次の様に求められる。

$$\{a^n\} = [M]^{-1} (\{P^n\} - \{F^n\}) \quad (3)$$

$$\{v^{n+1/2}\} = \{v^{n-1/2}\} + \{a^n\} \cdot \Delta t^n \quad (4)$$

$$\{d^{n+1/2}\} = \{d^n\} + \{v^{n+1/2}\} \cdot \Delta t^{n+1/2} \quad (5)$$

ここで、 $\Delta t^{n+1/2} = (\Delta t^n + \Delta t^{n+1})/2$

(3)式には、質量マトリックスを逆転させる演算 $[M]^{-1}$ が含まれている。しかし、対角化された質量マトリックスを用いれば、(3)式の計算はすべて非連成の演算となり、簡単なものになる。

(B) ランク不足

局所座標系 ξ, η を用いた場合、要素剛性マトリックスは次式で得られる。

$$[Ke] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] t \det[J] d\xi d\eta \quad (1)$$

ここで、 $[Ke]$: 要素剛性マトリックス

$[B]$: 歪マトリックス

$[D]$: 応力-歪マトリックス

$[J]$: Jacobi マトリックス

t : 板厚

(1)式の積分は、通常 Gauss-Legendre の求積法を用いて算出する(Fig. A1)。この数値積分を実施する場合は、最も正確な解が得られる位置に、積分点を置く必要がある。

1 次の内挿多項式を用いた要素では、4 個の積分点が必要となる。

1 次内挿多項式は、

$$N_1 = (1 - \xi)(1 - \eta)/4 \quad (2)$$

$$N_2 = (1 + \xi)(1 - \eta)/4 \quad (3)$$

$$N_3 = (1 + \xi)(1 + \eta)/4 \quad (4)$$

$$N_4 = (1 - \xi)(1 + \eta)/4 \quad (5)$$

となる。

Belytschko-Tsay 要素も、1 次の内挿多項式を用いているが、その数値積分に用いる積分点は要素中心 ($\xi = 0$, $\eta = 0$ の位置) の 1 点のみである (ただし、板厚方向には複数指定可能)。このように、必要な積分点の数を満たしていないことを、ランク不足と呼ぶ。

(C) アウグラスコントロール

1 積分点スキームを用いた要素は、アウグラスモード (Fig. A2) と呼ばれる剛体モードが生じ、時間とともに変形エネルギーが増大し、誤った計算が行われる。

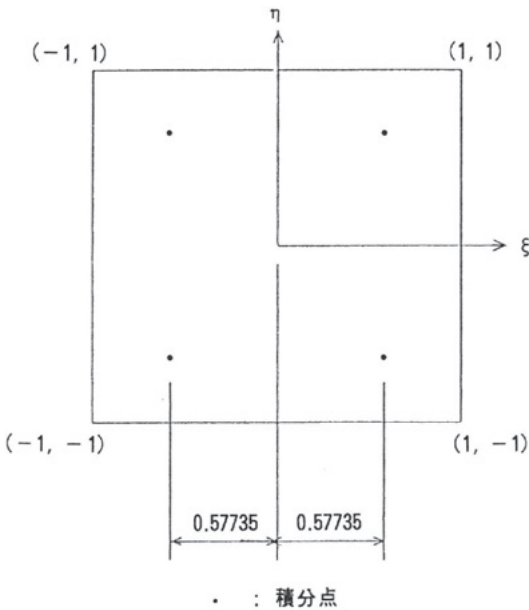


Fig. A1 Integral Point of Gauss-Legendre Quadrature

■ 著 者 ■



高田 賢治



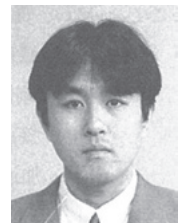
岡崎 悟



池田 慎一



中野 文雄



大村 成

以下に、アウグラスモードの種類を示す (Fig. A3)。これらの変形は、砂時計に似ているところから、アウグラスモードと呼ばれている。

アウグラスモードを抑える方法は、いくつか提案されている。Flanagan と Belytschko は、仮想的な剛性 (アウグラス剛性) をももとの要素剛性に付加することで、アウグラスモードをコントロールしている。

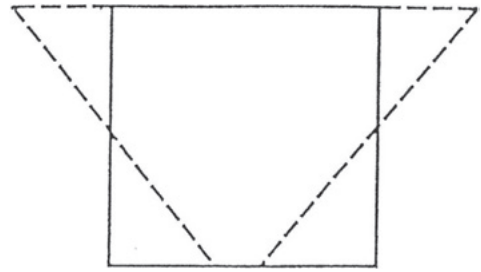


Fig. A2 Hourglass Modes in Membrane

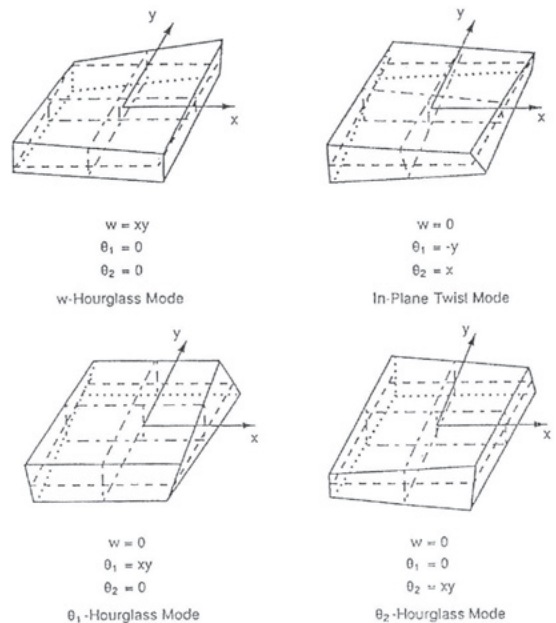


Fig. A3 Hourglass Modes in Bending